

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20.05.2016 г. – Вариант 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от числата е по-голямо от 4?

- А) $16^{\frac{1}{4}}$ Б) $3\sqrt{2}$ В) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ Г) $2\sqrt{3}$

2. Стойността на израза $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}+1)^2}$ е:

- А) $4-\sqrt{2}$ Б) $2+\sqrt{2}$ В) $4+\sqrt{2}$ Г) $2+3\sqrt{2}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{x^2-9}{x-3} + \frac{x-2}{x^2-4}$ са:

- А) $x \neq -2$ Б) $x \neq 2, x \neq 3$ В) $x \neq \pm 2$ Г) $x \neq \pm 2, x \neq 3$

4. Решенията на уравнението $x(3x+1)=3x+1$ са:

- А) 1 Б) -1 и 1 В) $-\frac{1}{3}$ и 1 Г) -1 и $\frac{1}{3}$

5. Ако $a = \log_3 3^6 - \log_2 2 + \log_5 1$, то стойността на израза $a^{\log_5 25}$ е равна на:

- А) 25 Б) 5 В) 2 Г) 1

6. Решенията на уравнението $5x^2 - 4 = x^4$ са:

- А) 1; 4 Б) 1; 2 В) ± 2 Г) ± 1 ; ± 2

7. Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $-\frac{1}{5}x + x^2 = 2$, то стойността на израза $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ е равна на:

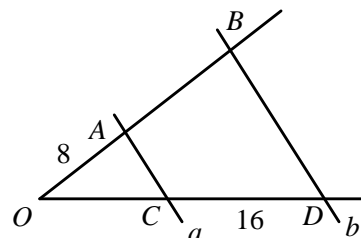
- А) $-\frac{1}{10}$ Б) $-\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{10}$ Г) $\frac{5}{2}$

8. Коя от посочените системи няма решение в множеството на реалните числа?

- А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} xy = 2 \\ y = x \end{cases}$ В) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ Г) $\begin{cases} xy = -2 \\ x = 5 \end{cases}$

9. На чертежа правите a и b са успоредни, $OA = 8$, $CD = 16$ и $OC : AB = 8 : 9$. Дължината на отсечката OB е:

- А) 12 Б) $\frac{56}{3}$ В) 20 Г) $\frac{80}{3}$



10. Дължините на катетите на правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) са 3 и 4. Ако вписаната в триъгълника окръжност се допира до страната AB в точка M , то $AM \cdot MB$ е равно на:

- А) 0,5 Б) 2 В) 3 Г) 6

11. Координатите на върха на параболата $y = -2x^2 + 4x - 1$ са:

- А) (1;1) Б) (-1;1) В) (-1;-7) Г) (1;-1)

12. Последният член на редицата с общ член $a_n = n(n-7)$, $n \in \mathbb{N}$, е 60. Броят n на членовете на тази редица е:

- А) 5 Б) 12 В) 17 Г) 60

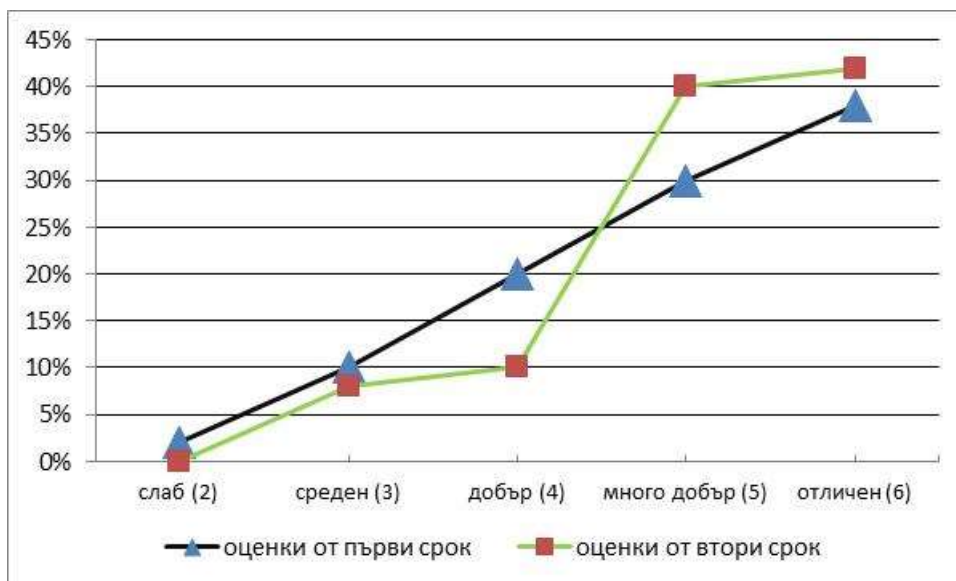
13. За растяща геометрична прогресия с първи член, равен на 1, е известно, че $a_1 + a_5 = 5$. Частното q на тази прогресия е равно на:

- А) 2 Б) $\sqrt{2}$ В) $-\sqrt{2}$ Г) -4

14. Стойността на израза $\sin 150^\circ - \cos 240^\circ + \operatorname{tg}(-45^\circ)$ е:

- А) 2 Б) 0 В) $-\frac{1}{2}$ Г) -1

15. На диаграмата е дадено процентното разпределение на оценките на ученици в края на първия и в края на втория срок. Броят на учениците и през двата срока е 150. Колко ученици повече са получили оценка „много добър (5)“ в края на втория срок в сравнение с първия учебен срок?



- А) 15 Б) 10 В) 6 Г) 4

16. Броят на четните четирицифрени числа с различни цифри, които могат да се запишат само с цифрите 1, 2, 4 и 8, е:

- А) 4 Б) 12 В) 18 Г) 24

17. За $\triangle ABC$ $AC = 3 \text{ cm}$, $BC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ и $\sphericalangle BAC$ е два пъти по-голям от $\sphericalangle ABC$. Дължината на радиуса на описаната окръжност около $\triangle ABC$ е:

- А) 1,5 cm Б) $\frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ cm}$ В) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$ Г) $3\sqrt{2} \text{ cm}$

18. В триъгълник с ъгъл 120° дължината на най-голямата страна е 7, а разликата на другите две страни е 2. Намерете дължината на най-малката страна на триъгълника.

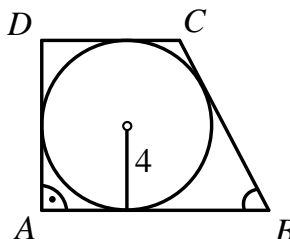
- А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 7

19. Страните AB и AD на успоредника $ABCD$ имат съответно дължини 3 cm и 5 cm . Диагоналът $BD = 4\sqrt{2}\text{ cm}$. Дължината на другия диагонал на успоредника е:

- А) $4\sqrt{2}\text{ cm}$ Б) 6 cm В) $2\sqrt{13}\text{ cm}$ Г) 12 cm

20. В правоъгълен трапец $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ е вписана окръжност с радиус $r = 4$. Ако $\sin \sphericalangle ABC = 0,8$, то лицето на трапеца е равно на:

- А) 36 Б) 72 В) $72\sqrt{2}$ Г) 144



Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете стойността на израза $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, ако $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

22. Решете неравенството $x^3 > \frac{81}{x}$.

23. Запишете числото x , за което е изпълнено равенството $5\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 6$.

24. През последните няколко последователни вечери на месец април температурите, измерени в градуси, са били следните 2; 3; 2; 4; 17; 16; 17; 17; 14; 14; 15. Намерете стойността на израза $2P + M + S$, където P е медианата, M е модата, а S е средната стойност на статистическия ред.

25. Намерете лицето на остроъгълен $\triangle ABC$ със страни $AB = 8\text{ cm}$, $BC = 7\text{ cm}$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се реши уравнението: $\sqrt{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{16x}} = \frac{5}{2}$.

27. Три числа, чийто сбор е 21, са последователни членове на растяща геометрична прогресия. Ако първото число не се промени, към второто число се прибави 1, а от третото се извади 1, ще се получат първите три члена на крайна аритметична прогресия, чиято сума е 55. Намерете броя на членовете на получената аритметична прогресия.

28. Около четириъгълника $ABCD$ е описана окръжност. Страните BC и CD са съответно 8 cm и 4 cm , а диагоналят BD е $4\sqrt{7}\text{ cm}$. Ако в четириъгълника може да се впише окръжност, намерете лицето на четириъгълника, радиуса на описаната окръжност и радиуса на вписаната окръжност.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 20 май 2016 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с избран отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	Г	2
3	Г	2
4	В	2
5	А	2
6	Г	2
7	А	2
8	А	2
9	В	2
10	Г	2
11	А	3
12	Б	3
13	Б	3
14	Б	3
15	А	3
16	В	3
17	В	3
18	А	3
19	Б	3
20	Б	3
21	$\frac{4}{15}$	4
22	$x \in (-3; 0) \cup (3; +\infty)$	4

23	$x = \frac{1}{2}$	4
24	56 ($P = 14, M = 17, S = 11$)	4
25	$10\sqrt{3} \text{ cm}^2$	4
26	$x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{63}$	10
27	5	10
28	$S_{ABCD} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2, r = 2\sqrt{3} \text{ cm},$ $R = \frac{4\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$	10

Въпроси с решения

26. Решение и критерии за оценяване.

1. Полагане $\sqrt{\frac{16x}{x-1}} = t, t > 0$ (2 точки).

2. Получаване на уравнението $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ (1 точка).

3. Намиране на $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$ (1 точка).

4. Решаване на уравнението $\sqrt{\frac{16x}{x-1}} = 2$ и получаване на $x_1 = -\frac{1}{3}$ (2 точки).

5. Решаване на уравнението $\sqrt{\frac{16x}{x-1}} = \frac{1}{2}$ и получаване на $x_2 = -\frac{1}{63}$ (2 точки).

6. Установяване, че x_1 и x_2 са решения – чрез проверка или определяне на допустими стойности. (2 точки)

II начин. Повдигане на квадрат и получаване на уравнението $\frac{16x}{x-1} + \frac{x-1}{16x} = \frac{17}{4}$ (2 точки), като $x \neq 0, x \neq 1$ (1 точка).

Освобождаване от знаменател и получаване на уравнението $189x^2 + 66x + 1 = 0$ (3 точки).

Намиране на корените на уравнението $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{63}$ (2 точки).

Установяване, че x_1 и x_2 са решения – чрез проверка или определяне на допустими стойности. (2 точки)

27. Решение и критерии за оценяване.

Определяне на геометричната прогресия a_1, a_1q, a_1q^2

Определяне на аритметичната прогресия a_1, a_1q+1, a_1q^2-1

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + 1 + a_1q^2 = 21 \\ 2(a_1q + 1) = a_1 + a_1q^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 21 \\ a_1(2q-1-q^2) = -3 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1(1+q+q^2)}{a_1(2q-1-q^2)} = \frac{21}{-3} \Rightarrow$$

$$\frac{1+q+q^2}{2q-1-q^2} = -7 \quad DC_q \quad q \neq 1 \Rightarrow 6q^2 - 15q + 6 = 0 \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \quad q_1 = 2 \quad q_2 = \frac{1}{2}$$

Геометричната прогресия е растяща $\Rightarrow q = 2$ и $a_1 = 3$.

Геометричната прогресия е **3, 6, 12**, аритметичната прогресия е **3, 7, 11**.

За аритметичната прогресия $a_1 = 3, d = 4, S_n = 55$ и $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}$,

$$55 = \frac{2 \cdot 3 + (n-1)4}{2} n, \quad 4n^2 + 2n - 110 = 0, \quad 2n^2 + n - 55 = 0, \quad n_{1,2} = \frac{-1 \pm 21}{4}, \quad n_1 = 5 \in \mathbb{N} \text{ и}$$

$n_2 = -\frac{11}{2} \notin \mathbb{N}$. Тогава броят на членовете на аритметичната прогресия е $n = 5$.

Критерии за оценяване:

1. Означаване на членовете на аритметичната и геометричната прогресия – **1 точка**
2. Съставяне на системата – **2 точки**.
3. Решаване на системата и определяне на частното – **4 точки**.
4. Определяне на членовете на аритметичната прогресия – **1 точка**.
5. Съставяне на уравнение за определяне на броя на членовете и определяне на броя им – **2 точки**.

28. Решение и критерии за оценяване.

Прилагане на косинусова теорема за $\triangle BCD$ и определяне на $\sphericalangle BCD = 120^\circ$ (**2 точки**).

Използване на свойството на страните на описания четириъгълник и определяне зависимостта $AD = x, x > 0, AB = x + 4$ (**1 точка**).

За срещуположните ъгли на вписания четириъгълник $\sphericalangle A = 60^\circ$ (**1 точка**).

След косинусова теорема за $\triangle ABD$ и решаване на квадратното уравнение $x^2 + 4x - 96 = 0$, $x_1 = 8$ и $x_2 = -12$ и извод, че само $x_1 = 8$ е решение (**2 точки**).

Намиране на лицето на четириъгълника $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} \Rightarrow$

$$S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \sin 60^\circ; S_{ABCD} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ (2 точки)}.$$

Определяне на радиуса на вписаната окръжност от $S = p \cdot r$, $r = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ (**1 точка**).

Определяне на радиуса на описаната окръжност чрез синусова теорема за $\triangle ABD$,

откъдето $2R = \frac{4\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$ и $R = \frac{4\sqrt{21}}{3} \text{ cm}$ (**1 точка**).