СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

8 юни 2024 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	А	Б	~~В~~	Г
2.	~~А~~	Б	В	Г
3.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	~~Б~~	В	Г
5.	А	Б	В	~~Г~~
6.	~~А~~	Б	В	Г
7.	~~А~~	Б	В	Г
8.	А	Б	~~В~~	Г
9.	А	~~Б~~	В	Г
10.	А	Б	~~В~~	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$x_1 = 2,\ x_2 = \sqrt{2}$
12.	30° или 150°

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13. Известно е, че $\sin 2x = \cos 3x$. Намерете всички възможни стойности на $\sin x$.

Решение: Имаме, че $2\sin x\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x = (4\cos^2 x - 3)\cos x$.

Даденото равенство е еквивалентно на $\big(2\sin x - 4(1-\sin^2 x) + 3\big)\cos x = 0$.

Ако $\cos x = 0$, то $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Ако $\cos x \neq 0$, то $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$. Корените на квадратното уравнение $4t^2+2t-1 = 0$ са $t_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Тъй като и двата корена са в интервала $[-1;\ 1]$, то те са възможни стойности за $\sin x$.

Окончателно $\sin x$ приема стойности 1, -1, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ или $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

. . . .

Задача 14. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 15. Точка M е вътрешна за квадрата, като $AM = 4$ и $BM = 13$. Намерете DM.

Решение: Нека P и Q са ортогоналните проекции на M съответно върху AB и AD. Да означим $PM = h$. Тогава $AP = \sqrt{AM^2 - PM^2} = \sqrt{16-h^2}$. Така, $BP = AB - AP = 15 - \sqrt{16-h^2}$. От Питагоровата теорема за $\triangle BPM$ получаваме

$$h^2 + 225 - 30\sqrt{16-h^2} + 16 - h^2 = 169.$$

Намираме $\sqrt{16-h^2} = \dfrac{72}{30} = \dfrac{12}{5}$. Следователно $h^2 = 16 - \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 = \dfrac{400-144}{25} = \dfrac{256}{25}$.

Така $h = \dfrac{16}{5}$. За триъгълник $\triangle DQM$ имаме $DQ = 15 - h$ и $QM = AP = \sqrt{16-h^2}$. Следователно $DM^2 = DQ^2 + QM^2 = 225 - 30h + h^2 + 16 - h^2 = 241 - 30h = 241 - 96 = 145$.

Окончателно $DM = \sqrt{145}$.

. . . .

Задача 15. Дадена е права четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основата ѝ $ABCD$ е ромб със страна 1 и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Ако $AA_1 = 2$ и E е средата на CC_1, то намерете косинуса на острия ъгъл, определен от AE и BD_1.

Решение: Да означим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{c}$. Имаме $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{b}^2 = 1$ и $\overrightarrow{c}^2 = 4$. Също така, $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \cos\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}$ и $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = 0$.

Изразяваме $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}$.

Имаме още $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Така, $\overrightarrow{AE}^2 = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{c}^2 + 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 4$.

Аналогично, $\overrightarrow{BD_1}^2 = \left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)^2 = \overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \overrightarrow{c}^2 - 2\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 5$.

Също така, $\overrightarrow{AE}\,\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)\left(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = -\overrightarrow{a}^2 + \overrightarrow{b}^2 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}^2 = 2$.

От дефиницията на скаларно произведение намираме

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BD_1}) = \frac{\overrightarrow{AE}\,\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AE}|\,|\overrightarrow{BD_1}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Тъй като $\dfrac{\sqrt{5}}{5} > 0$, то това е търсената стойност.

Задача 16. Решете уравнението $|ax^2 + x| = x + 1$ в зависимост от параметъра a.

Решение: Ако $a = 0$, то $|x| = x + 1$ има единствено решение $x = -\frac{1}{2}$. Нататък разглеждаме $a \neq 0$.

Търсим решенията на $ax^2 + x = x + 1$ и $ax^2 + x = -x - 1$, за които $x \geq -1$.

Уравненнието $ax^2 + x = x + 1$ е еквивалентно на $ax^2 = 1$. При $a < 0$ то няма корени. При $a > 0$ корените са $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. Имаме $x_1 > 0 > x_2$. Така x_1 е решение на уравнението за всяко $a > 0$. Също така x_2 е решение точно когато $-\dfrac{1}{\sqrt{a}} \geq -1$, т.е. за $a \geq 1$.

Уравнението $ax^2 + x = -x - 1$ е еквивалентно на $ax^2 + 2x + 1 = 0$. Имаме $D = 1 - a$. Следователно при $a > 1$, то няма решение. При $a = 1$ има двоен корен $x_3 = x_4 = -1$. И двата съвпадат с $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, така че не получаваме нови решения.

Разглеждаме случая $a < 1$. При $a < 1$ корените са $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$. Да означим $f(x) = ax^2 + 2x + 1$. Имаме $f(0) = 1 > 0$ и $f(-1) = a - 1 < 0$. Така f има точно един корен в интервала $(-1; 0)$. Имаме още $x_3 + x_4 = -\dfrac{2}{a}$ и $x_3 x_4 = \dfrac{1}{a}$ от формулите на Виет.

Ако $a > 0$, т.е. за $a \in (0; 1)$ имаме $x_3 < 0$ и $x_4 < 0$. От тях точно един е в интервала $(-1; 0)$ това е по-големият от двата корена: $\dfrac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$.

Ако $a < 0$, то $x_3 > 0 > x_4$. Следователно $x_3 > 0 > x_4 > -1$. И двата корена са по-големи от -1, така че са решения на даденото уравнение.

Окончателно:

ако $a < 0$, то решенията са $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

ако $a = 0$, то решението е $-\dfrac{1}{2}$.

ако $a \in (0; 1)$, то решенията са $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ и $\dfrac{-1 + \sqrt{1-a}}{a}$.

ако $a \geq 1$, то решенията са $\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.