СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

8 юни 2024 г.

Тема №1.

Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Пресметнете $1 + 3 + 5 + \ldots + 101 - (2 + 4 + 6 + \ldots + 100)$.

А) -50 ***Б)*** -51 ***В)*** 51 ***Г)*** 50

Задача 2. Най-малкото естествено число n, решение на неравенството $2^n > n^2 + 3n + 5$, е:

А) 6 ***Б)*** 5 ***В)*** 4 ***Г)*** 3

Задача 3. Нека α и β са от интервала $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, като $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $\operatorname{tg}\beta = 2$. Намерете $\sin(\alpha + \beta)$.

А) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ***Б)*** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ***В)*** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ***Г)*** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Задача 4. Най-голямата стойност на $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ в интервала $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right]$ е:

А) 7 ***Б)*** 6 ***В)*** $\dfrac{41}{8}$ ***Г)*** 2

Задача 5. Ако корените на $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$ са x_1, x_2 и x_3, то намерете стойността на израза $\dfrac{1}{2 - x_1} + \dfrac{1}{2 - x_2} + \dfrac{1}{2 - x_3}$.

А) 1 ***Б)*** $\dfrac{3}{2}$ ***В)*** $\dfrac{9}{4}$ ***Г)*** 2

Задача 6. Правоъгълен триъгълник има остър ъгъл с големина 15° и хипотенуза с дължина 12. Намерете лицето на триъгълника.

А) 18 ***Б)*** 24 ***В)*** 28 ***Г)*** 36

Задача 7. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, като $AB = 1$, $BC = 7$ и $CD = DA = 5$. Намерете $\sphericalangle CBD$.

А) 45° ***Б)*** 30° ***В)*** 60° ***Г)*** 15°

Задача 8. Три окръжности $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$ се допират външно по между си. Всяка от тях допира и права l. Ако $r_1 = 9$, $r_2 = 16$ и $r_3 > r_1$, то r_3 е равно на:

А) 108 ***Б)*** 120 ***В)*** 144 ***Г)*** 162

Задача 9. В правоъгълна координатна система са дадени точката $A(1; 2)$ и правата $l:\ 4x - 3y + 2 = 0$. Точките B и C са в първи квадрант, като B лежи на l и AC е успоредна на ординатната ос. Ако $AB = AC = 5$, намерете координатите на медицентъра на $\triangle ABC$.

А) $(5; 2)$ ***Б)*** $(2; 5)$ ***В)*** $(3; 4)$ ***Г)*** $(4; 3)$

Задача 10. В урна има 7 бели и 4 черни топки. Едновременно се изтеглят по случаен начин 3 топки. Каква е вероятността всички изтеглени топки да са едноцветни?

А) $\dfrac{2}{11}$ ***Б)*** $\dfrac{1}{5}$ ***В)*** $\dfrac{13}{55}$ ***Г)*** $\dfrac{7}{33}$

Отговорите на задачи 11. и 12. запишете в листа за отговори!

Задача 11. Решете уравнението $\log_x 2 + \log_2 8x^2 = 6$.

Задача 12. Точките A, B, C, D и E лежат в една равнина. $ABCD$ е квадрат и ABE е равностранен триъгълник. Намерете $\sphericalangle DEC$.

Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!

Задача 13. Известно е, че $\sin 2x = \cos 3x$. Намерете всички възможни стойности на $\sin x$.

Задача 14. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 15. Точка M е вътрешна за квадрата, като $AM = 4$ и $BM = 13$. Намерете DM.

Задача 15. Дадена е права четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основата ѝ $ABCD$ е ромб със страна 1 и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Ако $AA_1 = 2$ и E е средата на CC_1, то намерете косинуса на острия ъгъл, определен от AE и BD_1.

Задача 16. Решете уравнението $|ax^2 + x| = x + 1$ в зависимост от параметъра a.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!