СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

9 юни 2019 г.

Тема №1.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Кое от посочените числа е най-малко:

А) $|9^{-1/2}-1|$ ***Б)*** $|2-4^{-1/2}|$ ***В)*** $|1-8^{-2/3}|$ ***Г)*** $|4^{-3/2}-1|$

Задача 2. Изразът $A=\dfrac{6}{3-\sqrt{6}}-\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{5}{\sqrt{6}+1}$ е равен на:

А) 5 ***Б)*** 6 ***В)*** 7 ***Г)*** 9

Задача 3. Допустимите стойности за a в израза $\dfrac{\sqrt{2-a}}{2-\sqrt{a+3}}$ са:

А) $a\in[-1;2)\cup(2;3]$ ***Б)*** $a\in[-2;3]$ ***В)*** $a\in[-3;1)\cup(1;2]$ ***Г)*** $a\in[-3;\infty)$

Задача 4. Решенията на неравенството $\dfrac{1}{1-x}<\dfrac{x-4}{5-x}$ са:

А) $x\in(1;5)$ ***Б)*** $x\in(1;3)\cup(3;5)$ ***В)*** $x\in(-1;5)$ ***Г)*** $x\in(-\infty;1)\cup(5;\infty)$

Задача 5. Ако $p=\log_6 3$ и $q=\log_6 5$, то $\log_{45}12$ е равно на:

А) $\dfrac{2-q}{2p+q}$ ***Б)*** $\dfrac{2-p}{2p+q}$ ***В)*** $\dfrac{2-p}{p+2q}$ ***Г)*** $\dfrac{2+p}{2p+q}$

Задача 6. Ако двойката числа $(x;y)$ е ненулево решение на системата $\left|\begin{array}{l} xy+4x+\ y=0 \\ xy+3x+2y=0 \end{array}\right.$, тогава $|x+y|$ е равно на:

А) 0 ***Б)*** 5 ***В)*** 7 ***Г)*** 10

Задача 7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2-5x+2=0$, то стойността на израза $B=\dfrac{x_1}{1+\frac{x_1}{x_2}}+\dfrac{x_2}{1+\frac{x_2}{x_1}}$ е равна на:

А) -3 ***Б)*** $\dfrac{4}{5}$ ***В)*** $-\dfrac{2}{5}$ ***Г)*** $\dfrac{3}{4}$

Задача 8. Изразът $C=\dfrac{\sin 19^\circ}{1+\sin 2019^\circ\cos 19^\circ+\sin 219^\circ\cos 161^\circ}$ е равен на:

А) $\cos 19^\circ$ ***Б)*** $\operatorname{tg} 19^\circ$ ***В)*** $\sin 19^\circ$ ***Г)*** $\operatorname{cotg} 19^\circ$

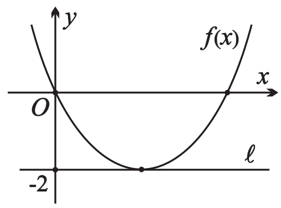
Задача 9. В $\triangle ABC$, $AB=8$, $AC=12$, $\sphericalangle BAC=45^\circ$, CM е медианата на страната AB и ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича CM в точка L. Лицето на $\triangle ALM$ е равно на:

А) $3\sqrt{2}$ ***Б)*** 4 ***В)*** $4\sqrt{3}$ ***Г)*** 6

Задача 10. В $\triangle ABC$, $AC=BC$, $AB=4$, R е радиусът на описаната около триъгълника окръжност, h е височината към страната AB и $R:h=5:9$. Лицето на $\triangle ABC$ е равно на:

А) 6 ***Б)*** 8 ***В)*** 10 ***Г)*** 12

Задача 11. На чертежа е изобразена графиката на квадратната функция $f(x) = x^2 + bx + c$. Ако правата ℓ е успоредна на абсцисната ос, тогава:



А) $b = -2\sqrt{2}$ и $c = 0$ **Б)** $b = \sqrt{2}$ и $c = 0$

В) $b = 0$ и $c = 2\sqrt{2}$ **Г)** $b = -2$ и $c = 0$

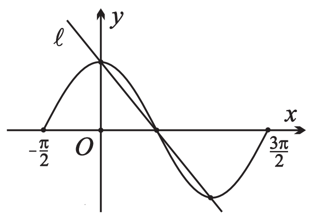
Задача 12. Общият член на редицата $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ е $b_n = (-1)^n + \dfrac{n}{2019}$, $n = 1, 2, \dots$. Сумата на първите 2019 члена на редицата е равна на:

А) 999 **Б)** 1001 **В)** 1009 **Г)** 2019

Задача 13. Ако числата a, b, c са отрицателни и образуват геометрична прогресия, стойностите на частното на прогресията q, за които $2c > 11b - 12a$, са:

А) $q \in (-1; 1)$ **Б)** $q \in \left(1; \dfrac{11}{3}\right)$ **В)** $q \in (2; 6)$ **Г)** $q \in \left(\dfrac{3}{2}; 4\right)$

Задача 14. На чертежа е изобразена графиката на функцията $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi/2; 3\pi/2]$, и през пресечните точки с координатните оси минава права ℓ с уравнение $y = kx + n$. Тогава:



А) $k = -\pi$ и $n = 1$ **Б)** $k = -2$ и $n = 1$

В) $k = 1$ и $n = -\dfrac{\pi}{2}$ **Г)** $k = -\dfrac{2}{\pi}$ и $n = 1$

Задача 15. В клуб „Фаталист“ играят 15 футболисти – 10 от девети клас и 5 от осми клас. Клубните фланелки с номера от 1 до 10 са раздадени на деветокласниците, а осмокласниците играят с фланелки без номера. Във всеки мач отборът на клуба излиза с 5 футболисти, от които трима деветокласници и общ сбор от номерата на фланелките равен на 13, и двама осмокласници, без номера. Броят на различните стартови състави на клуба е равен на:

А) 75 **Б)** 80 **В)** 82 **Г)** 90

Задача 16. Дадени са числовите данни: 12, 9, 16, 17, 12, $17-x$, $19+x$, 18, където $x > 0$. За тези данни е известно, че медианата им е равна на тяхното средноаритметично. Тогава x е равно на:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Задача 17. В $\triangle ABC$ ъглополовящите се пресичат в точка L, $\sphericalangle ALB = 105^\circ$ и $AB = 6$. Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е равен на:

А) $4\sqrt{3}$ **Б)** 6 **В)** $3\sqrt{2}$ **Г)** 4

Задача 18. В $\triangle ABC$, $AC = BC = 7$. Върху страната AB на триъгълника е взета точка D, като $AD = 3$ и $BD = 8$. Дължината на отсечката CD е равна на:

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6

Задача 19. В равнобедрения трапец $ABCD$ е вписана окръжност с център точка O и радиус $r = \sqrt{3}$, която се допира до бедрата на трапеца AD и BC, съответно в точките M и N. Ако точките A, O и N лежат на една права, периметърът на трапеца $ABCD$ е равен на:

А) 10 **Б)** $8\sqrt{3}$ **В)** 15 **Г)** 16

Задача 20. Лицето на ромб е четири пъти по-голямо от лицето на вписания в него кръг. Ако острият ъгъл на ромба е α, тогава $\operatorname{cotg} \alpha$ е равно на:

А) $\sqrt{\pi^2 - 1}$ **Б)** $\sqrt{\pi^2 - 2}$ **В)** $\sqrt{\pi^2 - 4}$ **Г)** $\pi^2 - 2$

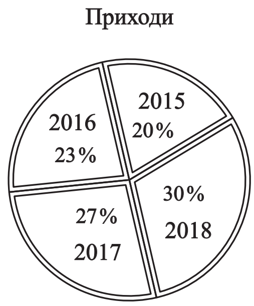
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

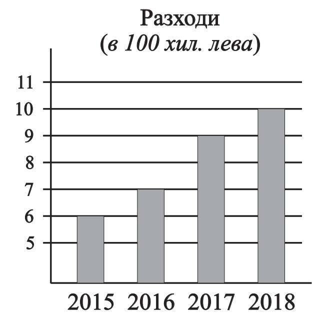
Задача 21. Стойността на израза $A = \dfrac{3^{\log_2 5}}{5^{\log_2 3}} + 5^{2\log_{25} 16 - \log_5 4}$ е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $\sqrt{\dfrac{6}{x-3} + 7} = \dfrac{1}{x-3}$ са:

Задача 23. От банка е изтеглен кредит при условията на сложна лихва с $p\%$ годишен лихвен процент и двугодишен период на погасяване. След една година по кредита е направена първата погасителна вноска, равна на $\dfrac{11}{23}$ от общо дължимата към този момент сума. След още една година кредитът е напълно погасен с втората вноска, равна на 69% от стойността на изтегления кредит. Годишният лихвен процент $p\%$ на банката е равен на:

Задача 24. Компания е реализирала приходи от общо 4 млн. лева за периода 2015–2018 г., като разпределението на приходите по години е дадено на кръговата диаграма. На другата диаграма са представени разходите на компанията по години в стотици хиляди лева. Колко лева е най-голямата годишна печалба на компанията в указания период и през коя година е реализирана?





Задача 25. Точката Q лежи върху диагонала BD на правоъгълника $ABCD$. Ако $BC = 15$, $BQ = 4$ и $CQ = 13$, дължината на страната AB на правоъгълника е равна на:

Пълните решения на задачи 26., 27. и 28. запишете в свитъка за решения!

Задача 26. Да се реши уравнението:

$$(x-3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} + 6 = 2x.$$

Задача 27. Числата a_1, a_2, a_3, a_4 образуват геометрична прогресия, а $a_1 - 6, a_2, a_3, a_4 - 12$ образуват аритметична прогресия. Да се намери сумата $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Задача 28. За четириъгълника $ABCD$ е дадено, че $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle CAD$, $AD = CD = 40$ и $BC = 60$. Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, да се намерят радиусът на тази окръжност и дължините на диагоналите AC и BD.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!