

Квадратни уравнения и неравенства.

I. Квадратно уравнение

Уравнение от вида: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

където $a \neq 0$, b и c са реални коефициенти, се нарича квадратно уравнение.

Ако коефициентът a е равен на 0, уравнението (1) се превръща в линейно, т.е при $a = 0$ (1) има един корен.

При $a \neq 0$, израза $D = b^2 - 4ac$ се нарича дискриминанта. Решенията на уравнение (1) се намират по формулата: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Ако b е четно число, оз-

начаваме $k = \frac{b}{2}$ и дискриминантата има вида $D_1 = k^2 - ac$. В този случай използ-

ваме съкратената формула: $x_{1/2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$ (2)

Квадратният тричлен може да се разложи на множители по следната форму-

ла: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, (3)

където x_1 и x_2 са корени на уравнението (1).

Ако уравнение (1) има реални корени x_1 и x_2 , то за тях са в сила формулите

на Виет: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (4)

Условията за съществуване на реални корени на уравнение (1).и определящи знаците им са следните:

◆ Уравнението ИМА реални корени, ако: $\begin{cases} a \neq 0 \\ D \geq 0 \end{cases}$ (5)

◆ Уравнението ИМА реални различни корени, ако: $\begin{cases} a \neq 0 \\ D > 0 \end{cases}$ (6)

◆ Уравнението НЯМА реални корени, ако: $\begin{cases} a \neq 0 \\ D < 0 \end{cases}$ (7)

◆ Уравнението ИМА положителни корени (може и да са еднакви), т.е.

Ако x_1 и $x_2 > 0$, то $\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$ (8)

◆ Уравнението ИМА два различни положителни корени, т.е.

Ако $x_1 \neq x_2 > 0$, то $\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$ (9)

◆ Уравнението ИМА отрицателни корени (може и да са еднакви), т.е.

Ако x_1 и $x_2 < 0$, то $\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$ (10)

◆ Уравнението ИМА два различни отрицателни корени, т.е.

Ако $x_1 \neq x_2 < 0$, то $\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$ (11)

◆ Уравнението ИМА един положителен и един отрицателен корен, т.е.

Ако $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$ (или $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$), то: $x_1 \cdot x_2 < 0$ (12)

Бележка 1

В (12) $D > 0$ е излишно условие, защото от $x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac > 0$

◆ Уравнението ИМА корени с различни знаци, като отрицателният е по-голям от положителния по абсолютна стойност, т.е.

Ако $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ (или $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$) и $|x_1| < |x_2|$ (или $|x_1| > |x_2|$), то

$\begin{cases} D > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$ (13)

Бележка

Изразите $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$ в (8) до (13) се изчисляват с формулите на Виет.

◆ Уравнението има един двукратен реален корен:
$$\begin{cases} a \neq 0 \\ D = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Квадратните уравнения се решават с помощта на формула (2) или по алгебричен начин. Алгебричният метод е следният: Квадратната функция (лявата страна на уравнението) се разлага на множители с помощта на (3). Нека $x_1 = a$, $x_2 = b$ и тогава имаме уравнението $(x - a)(x - b) = 0$. То се разпада на двете уравнения: $x - a = 0$ и $x - b = 0$, които са линейни и се решават като такива.

II. Квадратна функция

Нека лявата страна на (1) положим $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, (15)

Функцията y се нарича квадратна с аргумент (независима променлива) x . В

общия случай квадратната функция има Д.М.: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Квадратната функция има следните свойства:

◆ **СВОЙСТВО 1** – Графиката на квадратната функция е парабола. Ако коефициентът $a > 0$, параболата е с върха надолу (Фиг. 1). Ако коефициентът $a < 0$, параболата е с върха нагоре (Фиг. 2).

◆ **СВОЙСТВО 2** – От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при $a > 0$ функцията (15) е намаляваща в интервала $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ и

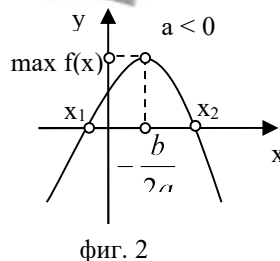
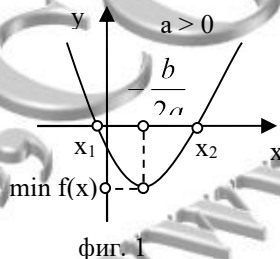
растяща в интервала $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$. При

$a < 0$ функцията (15) е растяща в интервала $(-\infty; -\frac{b}{2a})$ и намаляваща в ин-

тервала $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.

◆ **СВОЙСТВО 3** – От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при $a > 0$ функцията (15) има най-малка стойност ($\min f(x)$), която приема при $x = -\frac{b}{2a}$, но няма най-

голяма стойност. При $a < 0$ функцията (15) има най-голяма стойност



($\max f(x)$), която приема при $x = -\frac{b}{2a}$, но няма най-малка стойност.

◆ **СВОЙСТВО 4** – Как се изменя знакът на квадратната функция $f(x)$ в зависимост от D и a се вижда от Таблица №1:

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

III. Неравенства:

1) Квадратно неравенство

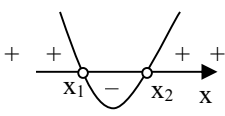
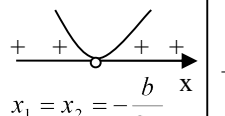
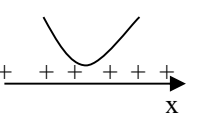
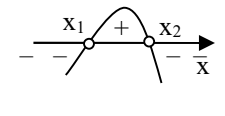
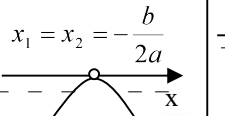
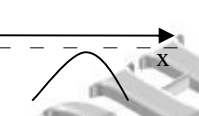
Неравенство при което от дясната страна имаме нула, а отляво – квадратна функция се нарича квадратно т.е. $ax^2 + bx + c > 0$ (16)

То се решава по следните начини:

I начин (графичен):

1. Намираме корените на квадратния тричлен. Например те са x_1 и x_2 , като $x_1 < x_2$.
2. Решенията на (16) определяме от следната таблица:

Таблица №2

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$	 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (17)	 $\forall x \neq x_1$ (18)	 $\forall x$ (19)
$a < 0$	 $x \in (x_1; x_2)$ (20)	 $x \in \emptyset$ (21)	 $x \in \emptyset$ (22)

За да можем да приложим Таблица № 2 за неравенството $ax^2 + bx + c < 0$, то умножаваме двете му страни с "– 1".

Бележка 2

За да не умножаваме всеки път с "– 1", можем да определим знака на a по следния начин:

- $a > 0$, ако знакът пред x^2 и знакът на неравенството съвпадат;
- $a < 0$, ако знакът пред x^2 и знакът на неравенството са различни

II начин (метод на интервалите):

1. Намираме корените на квадратния тричлен от (16) Например те са x_1 и x_2 , като $x_1 < x_2$ и го разлагаме на множители използвайки (3).

Бележка

След като разложим на множители можем да продължим да решаваме неравенството по алгебричен метод.

Алгебричният метод зависи от вида на неравенството. Например:

- Ако имаме неравенството $(a-b)(c-d) > 0$, то решаваме системите:

$$\begin{cases} a-b > 0 \\ c-d > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-b < 0 \\ c-d < 0 \end{cases} \quad (23)$$

- Ако имаме неравенството $(a-b)(c-d) < 0$, то решаваме системите:

$$\begin{cases} a-b > 0 \\ c-d < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} a-b < 0 \\ c-d > 0 \end{cases} \quad (24)$$

2. Нанасяме тези корени върху числовата ос, т.е. нахвърляме ДМ на подинтервали;
3. Определяме знака на най-десния интервал, като преброяваме колко минуса има пред неизвестното, и ако те са четен брой, записваме "+", ако те са нечетен брой – записваме "–";
4. Определяме знаците на следващите подинтервали, редувайки ги алтернативно отдясно наляво;
5. Решенията на неравенството са тези интервали, които отговарят на знака на неравенството.

2) Дробни (рационални) неравенства

Те са от вида: $\frac{F(x)}{G(x)} \geq 0$ (25)

(Дробните неравенства могат да имат всеки друг знак за неравенство). Те се решават по следния начин:

1. Определяме Д.М.;
2. Преобразуваме неравенството (без да привеждаме двете му страни под общ знаменател) до основното неравенство (25);
3. Разлагаме $F(x)$ и $G(x)$ на множители

Бележка

Неравенство (25) може да се запише във вида $F(x) \cdot G(x) \geq 0$, (26) ако $G(x) \neq 0$. Затова неравенства (25) и (26) са напълно еквивалентни, само когато $G(x) \neq 0$.

4. Прилагаме Методът на интервалите.

Бележка

Може да не търсим ДМ, ако при нахъсането на числовата ос на подинтервали отчетем, че знаменателят на дробта не може да е 0.

3) Сложни неравенства

Такива неравенства имаме тогава, когато от едната страна на неравенството имаме произведение от няколко двучлена (виж Зад.2). Те се решават по следния начин:

1. Проверяваме дали има двучлени, които са изпълнени за всяко X, като те отпадат при нанасянето на числовата ос. Обикновено това са изрази от вида: $(x^2 + a) \Rightarrow \forall x$ или $(x + a)^2 \Rightarrow \forall x \neq a$.
2. Прилагаме метода на интервалите.

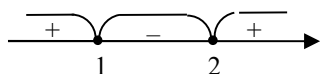
Зад. 1: $x^2 - 3x + 2 < 0$

Решение: От (2) намираме корените на квадратния тричлен:

$$D = 3^2 - 8 = 9 - 8 = 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{D} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

I начин – Ще приложим графичния начин. Коефициентът пред x^2 и неравенството имат различни знаци. За да използваме Таблица №2 няма да умножаваме с "–1", а от **Бележка 2** определяме, че $a < 0$, т.е имаме случая (20). Затова решенията са $x \in (1; 2)$

II начин – Ще приложим метода на интервалите. Нанасяме x_1 и x_2 на числовата ос и понеже няма минуси пред неизвестното получаваме



. Решенията са $x \in (1; 2)$

Зад. 2: $(3x^2 + 1)(x - 1)^2(x + 3)(x - 4) \leq 0$

Решение: От $3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x$
 $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x$ } даденото неравенство е: $(x + 3)(x - 4) \leq 0$.

Решаваме го по метода на интервалите:



. Решенията са $x \in [-3; 4]$

4. Биквадратни уравнения

Биквадратните уравнения имат вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, (27) където $a \neq 0$, b и c са реални коефициенти.

Биквадратните уравнения се решават чрез полагането $x^2 = y$ и решаваме съответното квадратно уравнение $ay^2 + by + c = 0$. Ако това последно уравнение има корени y_1 и y_2 , то следва, че

$$x^2 = y_1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{y_1} \quad \text{и} \quad x^2 = y_2 \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm \sqrt{y_2}$$

Броят на корените на биквадратното уравнение се определят от таблица №3

Таблица № 3

Корени на уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$	Корени на $ay^2 + by + c = 0$	Условия
Четири различни реални $x_{1/2} \neq x_{3/4}$	$y_1 > 0$ и $y_2 > 0$	$D > 0$ $y_1 + y_2 > 0$ $y_1 \cdot y_2 > 0$ (28)
Четири реални корени, които са два по два равни $x_1 = x_3; x_2 = x_4$	$y_1 = y_2 > 0$	$D = 0$ $y_1 = y_2 = -\frac{b}{2a}$ (29)
Четири равни реални $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$	$y_1 = y_2 = 0$	$D = 0$ $a \neq 0$ $b = c = 0$ (30)
Три реални, като $x_{1/2} \neq 0; x_3 = x_4 = 0$	$y_1 > 0$ и $y_2 = 0$	$y_1 = -\frac{b}{a} > 0$ $y_2 = c = 0$ (31)
Два различни реални $x_{1/2} \neq 0$	$y_1 > 0$ и $y_2 < 0$	$a = 0$ $y = -\frac{c}{b} > 0 \cup \begin{cases} a \neq 0 \\ y_1 \cdot y_2 < 0 \end{cases}$ (32)

Два равни реални $x_1 = x_2 = 0$	$y_1 = 0$ и $y_2 < 0$	$y_1 = c = 0$ $y_2 = -\frac{b}{a} < 0$	(33)
Няма реални	$y_1 \in \emptyset$ и $y_2 \in \emptyset$	$D < 0$	(34)
	$y_1 < 0$ и $y_2 < 0$	$D > 0$ $y_1 + y_2 < 0$ $y_1 \cdot y_2 > 0$	

5. Уравнения от по-висока степен с цели коефициенти

Общият вид на уравнение от n-та степен с цели коефициенти е $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, където $a_0 \neq 0$ (35)

В това уравнение, ако $a_0 = 1$, тогава то добива вида $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, (36)

Целите рационални корени на уравнение (36) са числа делители на свободния член a_n . Проверката кои от делителите на свободния член a_n са корени на уравнение (36), се извършва с правилото на Хорнер за делене на многочлен на двучлен.

Правило:

Нека да предположим, че коренът на уравнение (36) е b . Тогава можем да разделим многочлена вдясно на (36) с двучлена $(x - b)$ и се получава:
 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x - b)(c_0x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \dots + c_{n-1}) + \Gamma$ (37)
 Намирането на коефициентите c_0, c_1, \dots, c_{n-1} и числото Γ става по таблицата 3:

Таблица №3

	$a_0=1$	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
b	$c_0=a_0$	$c_1=a_1+bc_0$	$c_2=a_2+bc_1$...	$c_{n-1}=a_{n-1}+bc_{n-2}$	$\Gamma=a_n+bc_{n-1}$

Ако $\Gamma = 0$, деленето се извършва без остатък.

Например: Да се раздели многочлена $x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$ на $x - 2$ т.е. $b = 2$.

	1	-3	2	4	-3	2	-1	5
2	1	$-3+2 \cdot 1 = -1$	$2+2 \cdot (-1) = 0$	$4+2 \cdot 0 = 4$	$-3+2 \cdot 4 = 5$	$2+2 \cdot 5 = 12$	23	51

И така $x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = (x - 2)(x^6 - x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 12x + 23) + 51$, където $\Gamma = 51$.

Зад. 3: Да се намерят целите реални корени на уравнението $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

Решение: Делителите на свободния член са $\pm 1; \pm 2$. По правилото на Хорнер (Таблица №3) намираме кой от тях може да бъде решение на даденото уравнение.

	1	2	-1	-2
1	1	3	2	0

Щом $\Gamma = 0$ числото $x = 1$ е точен корен. Следващите делители не ги проверяваме (за ускоряване на процеса за намирането на корените), а записваме дадения многочлен като произведение от двучлен и квадратна функция

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$. За намиране корените на квадратната функция използваме (2): $D = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1; x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$,

т.е. даденото уравнение има три решения: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2$.

Ако в уравнение (35) $a_0 \neq 0$, не може да приложим правилото разгледано за уравнение (36). Затова преобразуваме уравнение (35) като умножим двете му страни с a_0^{n-1} и полагаме $a_0x = y$. Полученото уравнение $y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \dots + b_{n-1}y + b_n = 0$ е с цели коефициенти и с коефициент пред най-високата степен $b_0 = 1$. Върху това уравнение прилагаме схемата на Хорнер.

6. Параметрични уравнения и неравенства

Основни типове задачи:

Зад. 4: Да се намерят стойностите на реалния параметър m , за които уравнението $(m - 2)x^2 - 2(2m + 1)x + 2m + 1 = 0$:

- няма реални корени.
- има реални корени.
- има два положителни корена изпълняващи неравенството $x_1 + x_2 > \sqrt{2}$.
- има два отрицателни реални корени;
- има два реални корени с различни знаци;
- има двукратен реален корен.

Решение: а) Използваме (7):

$$\left. \begin{array}{l} m-2 \neq 0 \\ D < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ (2m+1)^2 - (m-2)(2m+1) < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ (2m+1)(m+3) < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ m \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow m \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$$

т.е. при $m \in \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$ даденото уравнение няма корени.

б) Използваме (5):

$$\left. \begin{array}{l} m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ (2m+1)^2 - (m-2)(2m+1) \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{array} \right\} \text{ т.е. при}$$

$m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ уравнението има реални корени

в) Използваме (8) като включим и даденото условие:

$$\left. \begin{array}{l} m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > \sqrt{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ (2m+1)^2 - (m-2)(2m+1) \geq 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m-2} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{(4-\sqrt{2})m+2+2\sqrt{2}}{m-2} > 0 \\ \frac{2m+1}{m-2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m \in \left(-\infty; -3\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$$

$m \in (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$

г) Използваме (10) и формулите на Виет (4):

$$\left. \begin{array}{l} m-2 \neq 0 \\ D \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ (2m+1)(m+3) \geq 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m-2} < 0 \\ \frac{2m+1}{m-2} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty) \\ m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \\ m \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; \infty) \end{array} \right\} \Leftrightarrow m \in \emptyset \quad \text{т.е. няма стой-}$$

ности на параметъра, при които корените на даденото уравнение да са отрицателни.

д) Използваме (12):

$$\left. \begin{array}{l} m-2 \neq 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ \frac{2m+1}{m-2} < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$$

е) Използваме (14):

$$\left. \begin{array}{l} m-2 \neq 0 \\ D = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m \neq 2 \\ (2m+1)(m+3) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{2}; m_2 = -3$$

Зад. 5: Дадено е уравнението $x^2 - 2(m+1)x - m^2 - 2m - 2 = 0$, където m е реален параметър.

а) Докажете, че за всяка стойност на m , уравнението има корени с различни знаци.

б) Намерете стойностите на m , за които разликата на корените на даденото уравнение е равна на 6 (ТУВ, 2000)

Решение: а) Решението на това условие става на две стъпки:

А) Първо трябва да докажем, че даденото уравнение има реални корени. За целта проверяваме дали е изпълнено (6): $D = (m+1)^2 + (m^2 + 2m + 2) = m^2 + 2m + 1 + m^2 + 2m + 2 = 2m^2 + 4m + 3 > 0$. Това неравенство е изпълнено за $\forall m$, защото дискриминантата му е $D_1 = 4 - 6 < 0$ и от (19) следва $\forall m$, т.е. даденото уравнение има два различни корени. Нека да ги означим с x_1 и x_2 .

В) Проверяваме при кои стойности на m двата корена са с различни знаци. От формулите на Виет знаем, че корените са с различни знаци, когато е изпълнено (12): $x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow -m^2 - 2m - 2 < 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow m^2 + 2m + 2 > 0$; $D = 1 - 2 < 0 \Rightarrow \forall m$ т.е. корените имат различни знаци.

От А) и В) следва, че даденото уравнение има два различни корена с различни знаци при $\forall m$.

б) В а) доказахме, че даденото уравнение има корени $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$. По условие имаме изпълнено $x_1 - x_2 = 6$. Това равенство преобразуваме така, че в лявата му страна да имаме сбор или произведение от двата корена (за да приложим формулите на Виет). За целта повдигаме на квадрат двете му страни $(x_1 - x_2)^2 = 36 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 36$. Прибавяме и изваждаме от лявата страна $2x_1x_2$: $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 36 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 36$ и сега използваме формулите на Виет (4): $4(m+1)^2 + 4(m^2 + 2m + 2) = 36 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$; $D = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = 2$; $m_1 = -1 + 2 = 1$; $m_2 = -1 - 2 = -3$ т.е. при $m_1 = 1$ и $m_2 = -3$ разликата от корените на даденото уравнение е равна на 6.

Зад. 6: Дадено е квадратното уравнение $x^2 - 5x + m = 0$, където m е реален параметър.

а) За кои стойности на m уравнението има два реални корени x_1 и x_2 , за които е изпълнено $x_1^2 + x_2^2 = 13$?

б) За кои стойности на m уравнението има два реални корени x_1 и x_2 , за които е изпълнено $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} > 0$? (ТУГ, 2000)

Решение: а) Даденото уравнение, за да има два реални корена трябва да е из-

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Люлин-3, бл. 348

☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

пълнено (5): $D = 25 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$. От формулите на Виет (4) имаме $x_1 + x_2 = 5$;

$x_1 x_2 = m$. Преобразуваме даденото уравнение като прибавим и извадим от лявата му страна $2x_1 x_2$ и получаваме $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow 5^2 - 2m = 13 \Leftrightarrow m = 6 \in \left(-\infty; \frac{25}{4}\right]$. Следователно при $m = 6$ дадено-

то уравнение има два реални корена, изпълняващи даденото условие.

б) Преобразуваме даденото неравенство така, че в него да се съдържат само сбор и произведение от двата корена и използваме формулите на Виет (4):

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2 x_1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{x_1 x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 3x_1 x_2)}{x_1 x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]}{x_1 x_2} > 0. \text{ Но } x_1 + x_2 = 5, x_1 x_2 = m \Rightarrow \frac{5(5^2 - 3m)}{m} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{25}{3}\right) \left. \vphantom{\frac{5(5^2 - 3m)}{m} > 0} \right\} \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{25}{4}\right)$$

Но $D = 25 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4}$

Следователно даденото уравнение има решения изпълняващи даденото неравенство при $m \in \left(0; \frac{25}{4}\right)$

Зад. 7: За кои стойности на реалния параметър m неравенството $f(x) = (2-m)x^2 - 2mx + 1 < 0$.

а) Има решение за $\forall x$.

б) Няма решение.

в) Има решение извън корените на $f(x) = 0$.

г) Има решение между корените на $f(x) = 0$.

д) Има решение $\forall x$ без двойния корен на $f(x) = 0$.

Решение: а) От (19) знаем, че неравенство има решение за $\forall x$, ако знакът на коефициента пред x^2 и знакът на неравенството съвпадат, и $D < 0$. За нашия случай това е системата $\begin{cases} 2-m < 0 \\ m^2 - (2-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \in (-2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$ т.е. няма

стойности на m при които даденото неравенство да има решение за $\forall x$.

б) В този случай използваме (21) и (22) (за $a=2-m>0$ виж Бележката 2).

$\begin{cases} 2-m > 0 \\ m^2 - (2-m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m^2 + m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \in [-2; 1] \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; 1]$ т.е. при $m \in [-2; 1]$ даденото неравенство няма решение.

в) Ако корените на $f(x)$ отбележим с x_1 и x_2 , то исканото условие е (17) (за $a = 2 - m < 0$ виж Бележката 2):

$\begin{cases} 2-m < 0 \\ m^2 - (2-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; +\infty)$. Това е и решението на задачата.

г) Ако корените на $f(x)$ отбележим с x_1 и x_2 , то исканото решение е $x \in (x_1; x_2)$. Това условие е изпълнено при (20) (за $a = 2 - m > 0$ виж Бележката 2):

$\begin{cases} 2-m > 0 \\ m^2 - (2-m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m^2 + m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$. Това е и решението на задачата.

д) Нека корените на $f(x)$ отбележим с x_1 и x_2 , то исканото решение е $\forall x \neq x_1 = x_2$. Това условие е изпълнено при (18):

$\begin{cases} 2-m < 0 \\ m^2 - (2-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m_1 = -2; m_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$. Това е и решението на задачата.

Зад. 8: За кои стойности на реалния параметър m уравнението $(m - 1)x^4 - 4x^2 + m + 2 = 0$ има:

а) четири реални корена.

б) два реални корена.

в) няма реални корени.

Решение: Даденото уравнение е биквадратно, затова полагаме $x^2 = y$ и получаваме квадратното уравнение $(m-1)y^2 - 4y + m + 2 = 0$ (С).

а) Даденото уравнение за да има четири корена (може и да са равни), то уравнение (С) трябва да има два положителни корена (може и да са равни). От (28) следва

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ y_1 + y_2 \geq 0 \\ y_1 y_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (m-1)(m+2) \geq 0 \\ \frac{4}{2(m-1)} \geq 0 \\ \frac{m+2}{m-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 \leq 0 \\ m-1 > 0 \\ (m+2)(m-1) \geq 0, \text{ при } m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-3; 2] \\ m > 1 \\ m \in (-\infty; -2] \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

$m \in (1; 2]$ т.е. при $m \in (1; 2]$ даденото уравнение има четири реални корена.

Учебен център „СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Люлин-3, бл. 348

☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

б) Даденото уравнение за да има два корена (може и да са равни), то уравнение (С) трябва да има при $a=0$ корен $y>0$ и при $a\neq 0$ корени $y_1\geq 0$ и $y_2 < 0$. От (32) и (33) следват два случая:

А) Когато $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, тогава уравнение (С) има един корен и той трябва да е положителен. За да проверим какъв е знакът на корена, заместваме $m = 1$ в (С): $0 \cdot y^2 - 4y + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} > 0$, т.е. $m = 1$ е решение на задачата.

В) Когато $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, тогава единият корен на (С) е отрицателен (например $y_2 < 0$) а другият положителен или нула: $y_1 \cdot y_2 \leq 0$. От формулите на Виет получаваме $\frac{m+2}{m-1} \leq 0 \Leftrightarrow (m+2)(m-1) \leq 0$, при $m \neq 1 \Leftrightarrow m \in [-2; 1)$

От А) и В) следва, че при $m \in [-2; 1]$ даденото уравнение има два реални корена.

в) Биквадратното уравнение няма реални корена, ако за уравнение (С) са изпълнени (34). Затова разглеждаме следните два случая:

А) Уравнение (С) няма решение, а това е при $D < 0$: $4 - (m + 2)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

В) Уравнение (С) има два отрицателни корена:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ y_1 + y_2 < 0 \\ y_1 \cdot y_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 6 \leq 0 \\ \frac{4}{2(m-1)} < 0 \\ \frac{m+2}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-3; 2] \\ m < 1 \\ m \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-3; -2)$$

От А) и В) следва, че при $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ биквадратното уравнение няма реални корени.

Задачи за упражнение:

Следват 47 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас”.