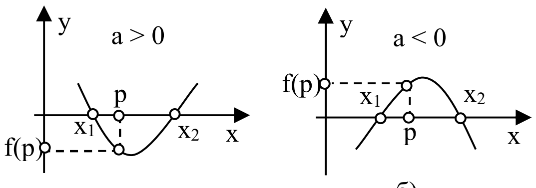
Разпределение на корените на квадратни уравнения и неравенства върху числовата ос

I. Разпределение на корените на квадратно уравнение върху числовата ос

Нека квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ има корени x_1 и x_2 като $x_1 < x_2$.



а) б)

Фиг. 1

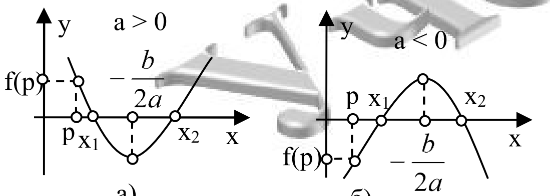
♦ Числото p се намира между корените (т.е. $x_1 < p < x_2$), ако е изпълнено $a.f(p) < 0$

$$p \in (x_1\,;\,x_2) \Leftrightarrow a.f(p) < 0 \qquad (1)$$

Верността на (1) се вижда от Фиг. 1. Независимо от знака на a, произведението a.f(p) е винаги отрицателно.

Бележка:

Ако числото p съвпада с един от двата корена, то (1) е $a.f(p) \le 0$.



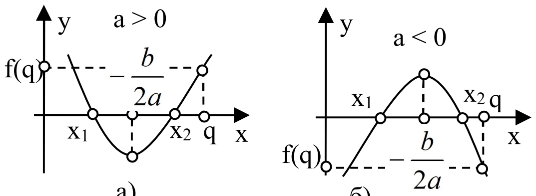
а) б)

Фиг. 2

♦ Числото p се намира извън двата корена наляво, ако е изпълнено

$$p < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ a.f(p) > 0 \\ p < -\dfrac{b}{2a} \end{array} \right. \qquad (2)$$

Верността на (2) се вижда от Фиг.2. Независимо от знака на a, произведението a.f(p) е винаги положително.



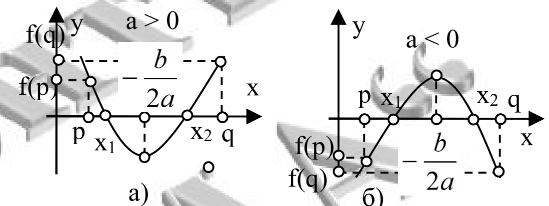
а) б)

Фиг. 3

♦ Числото q се намира извън двата корена надясно, ако е изпълнено

$$x_1 \le x_2 < q \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ a.f(q) > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < q \end{array} \right. \qquad (3)$$

Верността на (3) се вижда от Фиг. 3. Независимо от знака на a, произведението a.f(q) е винаги положително.



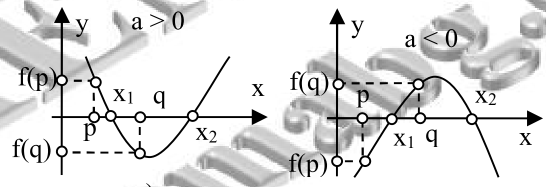
а) б)

Фиг. 4

♦ Корените на квадратното уравнение x_1 и x_2, принадлежат на интервала от числа p и q, ако е изпълнено

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \in (p\,;\,q) \\ x_2 \in (p\,;\,q) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ a.f(p) > 0 \\ a.f(q) > 0 \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q \end{array} \right. \qquad (4)$$

Верността на (4) се вижда от Фиг. 4.



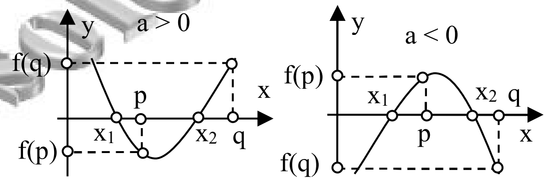
а) б)

Фиг. 5

♦ Точно (поне) един от корените на квадратното уравнение x_1 или x_2, принадлежи на интервала от числа p и q, ако е изпълнено

$$\left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ a \ne 0 \\ f(p).f(q) < 0 \end{array} \right. \qquad (5)$$

Както се вижда от Фиг. 5, когато числото q е между двата корена, а мястото на другото число p е наляво, (т.е. $p < x_1 < q < x_2$) имаме изпълнено $\left| \begin{array}{l} D > 0 \\ a.f(p) > 0 \\ a.f(q) < 0 \end{array} \right. \quad (6)$. Когато числото p е между двата корена, а другото число q е надясно (т.е. $x_1 < p < x_2 < q$), то от Фиг. 6 се вижда, че е изпълнено



а) б)

Фиг. 6

$\begin{cases} D>0 \\ a.f(p)<0 \\ a.f(q)>0 \end{cases} \quad (7)$. Обединявайки (6) и (7), получаваме (5).

Бележка:

Нека да отбележим, че случаите, за които се прилага формула (5) са, кога-то е посочено точното място на единия корен на квадратното уравнение, а не е посочено мястото на другия корен.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 1: За кои стойности на параметъра m числото 0 се намира между корените на уравнението $4x^2 – 4(m – 1)x – 3m + 13 = 0$.

Решение: Щом числото 0 е между корените, то уравнението има два различни корена и използваме (1): $a = 4$; $f(0) = 4.0^2 – 4(m – 1).0 – 3m + 13 = – 3m + 13 \Rightarrow 4(– 3m + 13) < 0 \Leftrightarrow m > \frac{13}{3}$, т.е. при $m > \frac{13}{3}$ числото 0 се намира между корените на даденото уравнение.

Бележка:

Задачата може да се реши като се използва, че двата корена на даденото уравнение са с различни знаци, т.е. да използваме (12) от Тема “Квадратни уравнения и неравенства”

Зад. 2: За кои стойности на параметъра m числото – 5 е по-малко от корените на уравнението $x^2 + (3m – 1)x+ 2m^2 – 1 = 0$.

Решение: За тази задача е изпълнено (2) и Фиг. 2:

$$-5 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0 \\ a\,f(-5) > 0 \\ -5 < -\frac{b}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-1)^2 - 4(2m^2-1) \ge 0 \\ (-5)^2 + (3m-1)(-5) + 2m^2 - 1 > 0 \\ -5 < -\frac{3m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 \ge 0 \\ 2m^2 - 15m + 29 > 0 \\ 3m - 1 < 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty) \\ \forall m \\ m < \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1]$$

Това е и решението на задачата.

Зад. 4: За кои стойности на параметъра m точно един от корените на уравнението $(2 – m)x^2 – 2(3m – 2)x – 2m+1=0$, принадлежи на интервала от числа – 3 и – 2.

Решение: В задачата е показано само мястото на един от корените като мястото на другия не е уточнено (може да е наляво от числото – 3 или надясно от числото – 2). Затова използваме общата формула (5):

A) $D > 0 \Rightarrow (3m – 2)^2 – (2m – 1)(2 – m) > 0 \Leftrightarrow 9m^2 – 12m + 4 – 5m + 2m^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow 11m^2 – 17m + 6 > 0$; $m_1 = \frac{6}{11}$, $m_2 = 1 \Rightarrow m \in \left(-\infty; \frac{6}{11}\right) \cup (1; +\infty)$.

Бележка:

Тук разглеждаме D > 0, защото по условие двата корена се намират на различно място спрямо дадени числа, т.е. те са различни.

B) $a \ne 0 \Rightarrow 2 – m \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 2$.

C) $f(– 3) f(– 2) < 0$;

$f(– 3) = (2 – m)(– 3)^2 – 2(3m – 2) (– 3) – 2m + 1 = 18 – 9m + 18m – 12– 2m+1 = 7m + 7$;

$f(– 2) = (2 – m)(– 2)^2 – 2(3m – 2) (– 2) – 2m + 1 = 8 – 4m + 12m – 8 – 2m + 1 = 6m + 1$;

$$f(-3)f(-2) = (7m+7)(6m+1) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-1; -\frac{1}{6}\right)$$

Засичаме решенията от A), B) и C) и получаваме крайното решение $m \in \left(-1; -\frac{1}{6}\right)$.

Зад. 6: При кои стойности на параметъра m единият корен на уравнението (m –

1)$x^2 - 2(3m - 4)x + 5(m - 3) = 0$ е между числата 6 и 7, а другият е по-малък от 6?

<u>Решение:</u> От условието следва, че даденото уравнение има два корена, следователно $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. При тези стойности на параметъра имаме следното разположение на корените: $x_1 < 6 < x_2 < 7$, т.е. имаме изпълнено (7): Затова разглеждаме случаите:

A) $D > 0 \Rightarrow (3m-4)^2 - 5(m-3)(m-1) > 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 24m + 16 - 5m^2 + 20m - 15 > 0$
$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0$, за $\forall m \neq \frac{1}{2}$;

B) $a.f(6) < 0$;
$f(6) = 36(m-1) - 12(3m-4) + 5m - 15 = 36m - 36 - 36m + 48 + 5m - 15 = 5m - 3$
$a.f(6) = (m-1)(5m-3) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$;

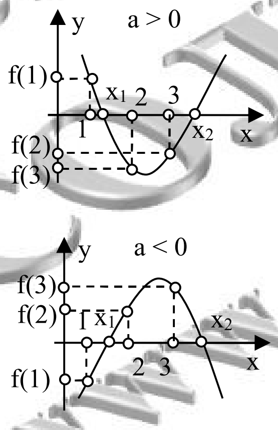
C) $a.f(7) > 0$;
$f(7) = 49(m-1) - 14(3m-4) + 5m - 15 = 49m - 49 - 42m + 56 + 5m - 15 = 12m - 8$
$a.f(7) = (m-1)(12m-8) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$;

Засичаме решенията от A), B) и C) и получаваме, че $m \in \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{3}\right)$ са крайните решения на задачата.

Зад. 7: При кои стойности на параметъра m единият корен на уравнението $mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$ е между числата 1 и 2, а другият е по-голям от 3?

<u>Решение:</u> От условието следва, че даденото уравнение има два различни корена, следователно $m \neq 0$. Разположението на корените и числата е показано на Фиг. 7. За подобно разположение нямаме готова формула, но както се вижда от Фиг. 7, даденото разположение на корените и числата се изпълнява, ако е изпълнена системата:

$$\left|\begin{array}{l} D > 0 \\ a\,f(1) > 0 \\ a\,f(2) < 0 \\ a\,f(3) < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} (m-1)^2 - 4m > 0 \\ m\,(m + m - 1 + 1) > 0 \\ m\,(4m + 2m - 2 + 1) < 0 \\ m\,(9m + 3m - 3 + 1) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m^2 - 6m + 1 > 0 \\ 2m^2 > 0 \\ m(6m-1) < 0 \\ m(12m-2) < 0 \end{array}\right.$$



Фиг. 7

$$\left|\begin{array}{l} m \in \left(-\infty; 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}; +\infty\right) \\ \forall m \neq 0 \\ m \in \left(0; \frac{1}{6}\right) \\ m \in \left(0; \frac{1}{6}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{1}{6}\right).$$

Това са и търсените стойности на параметъра.

Зад. 9: При кои стойности на параметъра m единият корен на уравнението $(m^2 + 1)x^2 + 2mx - 3 = 0$ е между 0 и 1, а за другият имаме $|x_2| < x_1(1 - x_2)$?

<u>Решение:</u> Щом единият корен е между 0 и 1, то той е положителен и нека да го означим с x_1. Знакът на другия корен намираме от формулите на Виет $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_1 x_2 = -\frac{3}{m^2+1}$. Но $m^2 + 1 > 0$ за $\forall m \Rightarrow x_1.x_2 < 0$. Но $0 < x_1 < 1 \Rightarrow x_2 < 0$, тогава $|x_2| = -x_2$ и $x_2 < 0 < x_1 < 1$. Затова разглеждаме два случая:

A) За корените имаме $x_2 < 0 < x_1 < 1$. Коефициентът пред x^2 е $m^2 + 1 > 0$. Това неравенство е изпълнено за $\forall m$, т.е. параболата е с върха надолу (Фиг. 6 а)). От (7) записваме:
$$\left|\begin{array}{l} m^2 + 3m^2 + 3 > 0 \\ -3 < 0 \\ m^2 + 1 + 2m - 3 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \forall m \\ m^2 + 2m - 2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}; +\infty\right).$$

$$B) \left|\begin{array}{l} |x_2| < x_1(1 - x_2) \\ |x_2| = -x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow -x_2 < x_1 - x_1.x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - x_1.x_2 > 0 \Rightarrow -\frac{2m}{m^2+1} + \frac{3}{m^2+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3-2m}{m^2+1} > 0.$$

Но $m^2 + 1$ *за* $\forall m \Rightarrow 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$

От A) и B) следва $m \in \left(-\infty; -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$, което е решение на задачата.

II. Разпределение на корените на квадратно неравенство върху числовата ос

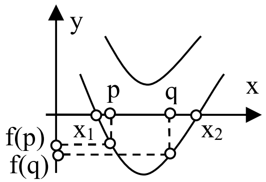
В задачи, в които се изисква да се разпределят решенията на квадратно неравенство върху числовата ос, трябва да се вземат предвид всички възможни случаи. Затова ще разгледаме няколко основни задачи.

Основна Зад. 1: Да се намерят стойностите на реален параметър, за които неравенството $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ е изпълнено за всяко x, принадлежащо на интервала от числа $(p; q)$.

Решение: В зависимост от ориентацията на върха на параболата на функцията $f(x)$ разглеждаме два случая:

А) Нека $a > 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи (Фиг. 8):

1) $D \le 0$. По условие търсим отрицателни стойности на $f(x)$ ($f(x) < 0$). От Таблица №1 на тема "Квадратни уравнения и неравенства" се вижда, че такива няма, т.е. неравенството $f(x) < 0$ няма решение, следователно $f(x) < 0$ няма решение и в интервала $(p; q)$.



Фиг. 8

2) $D > 0$. Неравенството $f(x) < 0$ е изпълнено за $\forall x \in (p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено $x_1 \le p < q \le x_2$. От Фиг. 8 се вижда, че това е възможно при $\left| \begin{array}{l} f(p) \le 0 \\ f(q) \le 0 \end{array} \right.$ (8)

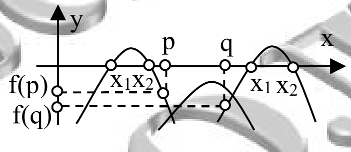
От 1) и 2) следва, че при $a > 0$ неравенството $f(x) < 0$ има решения $\forall x \in (p; q)$, ако за $D > 0$ е изпълнено (8).

Бележка:

Както знаем от (1), ако едно число принадлежи на интервала от решения $(x_1; x_2)$, то условието $D > 0$ е излишно.

В) Параболата е с върха нагоре, т.е. $a < 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи (Фиг. 9):

1) $D < 0$. От (19) на Тема "Квадратни уравнения и неравенства" и от Фиг. 9 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то неравенството $f(x) < 0$ има решение $\forall x$, следователно $f(x) < 0$ има решение и за $\forall x \in (p; q)$.



Фиг. 9

2) $D \ge 0$. Неравенството $f(x) < 0$ е изпълнено за $\forall x \in (p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ (Фиг. 9) са изпълнени следните случаи:

$$x_1 \le x_2 \le p \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ f(p) \le 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \le p \end{array} \right. \quad или \quad q \le x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ f(q) \le 0 \\ q \le -\dfrac{b}{2a} \end{array} \right. \qquad (9)$$

От 1) и 2) следва, че при $a < 0$ неравенството $f(x) < 0$ има решения $\forall x \in (p; q)$, ако $D < 0$, или ако е изпълнено (9).

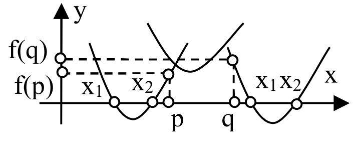
Крайните решения следват от обединяването на А) и В).

Основна Зад. 2: Да се намерят стойностите на реален параметър, за които неравенството $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ е изпълнено за всяко x принадлежащо на интервала от числа $(p; q)$.

Решение: В зависимост от ориентацията на върха на параболата разглеждаме два случая:

А) Параболата е с върха надолу, т.е. $a > 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи (Фиг. 10):

1) $D < 0$. От (19) Тема "Квадратни уравнения и неравенства" и от Фиг. 10 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то неравенството $f(x) > 0$ има решение $\forall x$, следователно $f(x) > 0$ има решение и за $\forall x \in (p; q)$.



Фиг. 10

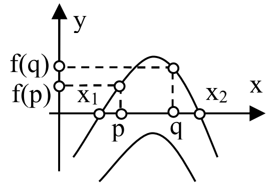
2) $D \ge 0$. Неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за $\forall x \in (p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ са изпълнени следните случаи:

$$x_1 \le x_2 \le p \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ f(p) \ge 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \le p \end{array} \right. \quad или \quad q \le x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} D \ge 0 \\ f(q) \ge 0 \\ q \le -\dfrac{b}{2a} \end{array} \right. \qquad (10)$$

От 1) и 2) следва, че при $a > 0$ неравенството $f(x) > 0$ има решения $\forall x \in (p; q)$, ако $D < 0$ или ако $D \ge 0$ е изпълнено (10).

В) Параболата е с върха нагоре, т.е. $a < 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи (Фиг. 11):

1) $D \le 0$. От (21) и (22) на Тема "Квадратни уравнения и неравенства" и от Фиг. 11 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са различни, то неравенството $f(x) > 0$ няма решение, следователно $f(x) > 0$ няма решение в интервала от числа $(p; q)$.



Фиг. 11

2) $D > 0$. Неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за $\forall x \in (p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено $x_1 \le p < q \le x_2$. От Фиг. 11 се вижда, че това е възможно при $\left| \begin{array}{l} f(p) \ge 0 \\ f(q) \ge 0 \end{array} \right.$ (11)

От 1) и 2) следва, че при $a < 0$ неравенството $f(x) > 0$ има решения $\forall x \in (p; q)$, ако за $D > 0$ е изпълнено (11).

Крайните решения следват от обединяването на А) и В).

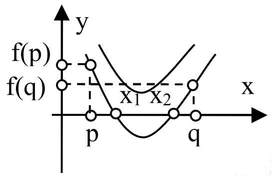
Бележка:

- От (8) до (11) имаме нестрого неравенство, защото по условие интервала $(p; q)$ е отворен.
- Случаите А) от **Основна задача 1** могат да се обединят със случаите В) от **Основна задача 2**. Също могат да се обединят случаите В) от **Основна задача 1** и случаите А) от **Основна задача 2**.

Основна Зад. 3: Да се намерят стойностите на реален параметър, за които всички решения на неравенството $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ принадлежат на интервала от числа $(p; q)$.

Решение: В зависимост от ориентацията на върха на параболата разглеждаме два случая:

А) Параболата е с върха надолу, т.е. $a > 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:



Фиг. 12

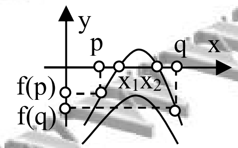
1) $D \le 0$. От (21) и (22) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 12 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са различни, то неравенството $f(x) < 0$ няма решение, следователно задачата няма решение в интервала от числа $(p; q)$.

2) $D > 0$. Всичките решения на неравенството $f(x) < 0$ принадлежат на интервала $(p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено $p \le x_1 < x_2 \le q$.

От Фиг. 12 и (4) се вижда, че това е възможно при
$$\begin{cases} D > 0 \\ f(p) \ge 0 \\ f(q) \ge 0 \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q \end{cases} \qquad (12)$$

От 1) и 2) следва, че при $a > 0$ всичките решения на неравенството $f(x) < 0$ принадлежат на интервала $(p; q)$, ако е изпълнено (12).

В) Параболата е с върха нагоре, т.е. $a < 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:



Фиг. 13

1) $D \le 0$. От (19) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 13 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то $f(x) < 0$ има решение $\forall x$, т.е не всички решения принадлежат на интервала $(p; q)$. Затова при даденото условие и при $D \le 0$ задачата няма решение.

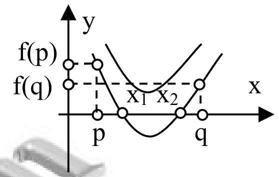
2) $D > 0$. От (17) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 13 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то неравенството $f(x) < 0$ има решение $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ т.е не всички решения принадлежат на интервала $(p; q)$. Затова при даденото условие и при $D > 0$ задачата няма решение

От А) и В) следва, че всички решения на неравенството $f(x) < 0$ принадлежат на интервала $(p; q)$, ако е изпълнено (12).

Основна Зад. 4: Да се намерят стойностите на реален параметър, за които всички решения на неравенството $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ принадлежат на интервала от числа $(p; q)$.

Решение: В зависимост от ориентацията на върха на параболата разглеждаме два случая:

А) Параболата е с върха надолу, т.е. $a > 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:

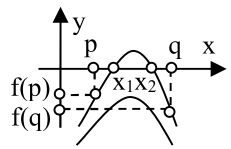


Фиг. 14

1) $D < 0$. От (19) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 14 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то неравенството $f(x) > 0$ има решение за $\forall x$, т.е. не всички решения принадлежат на интервала $(p; q)$. Затова при даденото условие и при $D < 0$ задачата няма решение в интервала от числа $(p; q)$.

2) $D \ge 0$. От (17) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 14 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то неравенството $f(x) > 0$ има решение $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, т.е не всички решения принадлежат на интервала $(p; q)$. Затова при даденото условие и при $D \ge 0$ задачата няма решение.

В) Параболата е с върха нагоре, т.е. $a < 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:



Фиг. 15

1) $D \le 0$. От (19) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 13 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са различни, то неравенството $f(x) > 0$ няма решение, следователно $f(x) > 0$ няма решение в интервала $(p; q)$.

2) $D > 0$. Всичките решения на неравенството $f(x) > 0$ принадлежат на интервала $(p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено $p \le x_1 < x_2 \le q$. От Фиг. 15 и (4) се вижда, че това е възможно при
$$\begin{cases} D > 0 \\ f(p) \le 0 \\ f(q) \le 0 \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q \end{cases} \qquad (13)$$

От 1) и 2) следва, че при $a < 0$ всичките решения на неравенството $f(x) > 0$ принадлежат на интервала $(p; q)$, ако е изпълнено (13).

От А) и В) следва, че всички решения на неравенството $f(x) > 0$ принадлежат на интервала $(p; q)$, ако е изпълнено (13).

Бележка:

- Второто и третото неравенство в (12) и (13) са нестроги неравенства, защото интервала от числа $(p; q)$ е отворен.
- Случаите А) от **Основна задача 3** могат да се обединят със случаите В) от **Основна задача 4**. Също могат да се обединят случаите В) от **Основна задача 3** и случаите А) от **Основна задача 4**.

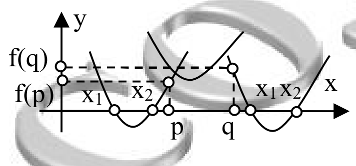
Основна Зад. 5: Да се намерят стойностите на реален параметър, за които неравенството $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ има решение в интервала от числа $(p; q)$.

Решение: В тази задача се търсят стойностите на реален параметър, за които неравенството $f(x) < 0$ има едно решение в интервала от числа $(p; q)$, а мястото на другото не е уточнено. Подробното анализиране на различните случаи е трудоемко, затова условието се променя и решаването протича на два етапа: Първо се намират стойностите на параметъра, за които неравенството $f(x) < 0$ НЯМА решения в интервала $(p; q)$ и след това получените стойности се изключват от интервала $(-\infty; +\infty)$.

За да намерим стойностите на параметъра, за които неравенството $f(x) < 0$ няма решения в интервала $(p; q)$, изследваме ориентацията на параболата.

А) Параболата е с върха надолу т.е. $a > 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:

1) $D \le 0$. От (21) и (22) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 16 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са различни, то неравенството $f(x) < 0$ няма решение, следователно $f(x) < 0$ няма решение и в $(p; q)$.



Фиг. 16

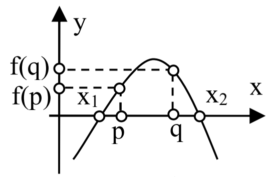
2) $D > 0$. Неравенството $f(x) < 0$ няма решения в интервала $(p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ са изпълнени следните случаи:

$$x_1 < x_2 \le p \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ f(p) \ge 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \le p \end{cases} \quad или \quad q \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \\ f(q) \ge 0 \\ q \le -\dfrac{b}{2a} \end{cases} \qquad (14)$$

От 1) и 2) следва, че при $a > 0$ неравенството $f(x) < 0$ няма решение в интервала $(p; q)$, ако $D \le 0$, или ако е изпълнено (14). Изключваме тези стойности от интервала $(-\infty; +\infty)$ и намираме стойностите на параметъра, при които неравенството $f(x) < 0$ има едно решение в интервала $(p; q)$.

В) Параболата е с върха нагоре, т.е. $a < 0$. Неравенството $f(x) < 0$ няма решение в интервала от числа $(p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено $x_1 \le p < q \le x_2$. От Фиг. 17 се вижда, че това е възможно при

$$\begin{cases} f(p) \ge 0 \\ f(q) \ge 0 \end{cases} \qquad (15)$$



Фиг. 17

Следователно при $a < 0$ неравенството $f(x) < 0$ няма решение в интервала $(p; q)$, ако е изпълнено (15). Изключваме тези стойности от интервала $(-\infty; +\infty)$ и намираме стойностите на параметъра, при които неравенството $f(x) < 0$ има едно решение в интервала $(p; q)$.

Крайните решения следват от А) и В).

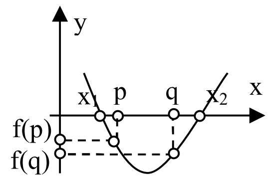
Основна Зад. 6: Да се намерят стойностите на реален параметър, за които неравенството $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ има решение в интервала от числа $(p; q)$.

Решение: В тази задача се търсят стойностите на реален параметър, за които неравенството $f(x) > 0$ има едно решение в интервала от числа $(p; q)$, а мястото на другото не е уточнено. Подробното анализиране на различните случаи е трудоемко, затова условието се променя и решаването протича на два етапа: Първо се намират стойностите на параметъра, за които неравенството $f(x) > 0$ НЯМА решения в интервала $(p;q)$, и след това получените стойности се изключват от интервала $(-\infty;+\infty)$

За да намерим стойностите на параметъра, за които неравенството $f(x) > 0$ няма решения в интервала $(p; q)$, изследваме ориентацията на параболата.

А) Параболата е с върха надолу, т.е. $a > 0$. Неравенството $f(x) > 0$ няма решение в интервала от числа $(p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено $x_1 \le p < q \le x_2$. От Фиг. 17 се вижда, че това е възможно при

$$\begin{cases} f(p) \le 0 \\ f(q) \le 0 \end{cases} \qquad (16)$$

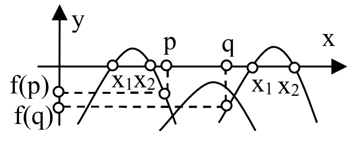


Фиг. 18

Следователно при $a > 0$ неравенството $f(x) > 0$ няма решение в интервала $(p; q)$, ако е изпълнено (16). Изключваме тези стойности от интервала $(-\infty; +\infty)$ и намираме стойностите на параметъра, при които неравенството $f(x) > 0$ има едно решение в интервала $(p; q)$.

В) Параболата е с върха нагоре, т.е. $a < 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:

1) $D \le 0$. От (21) и (22) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 19 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са различни, то неравенст-



Фиг. 19

вото $f(x) > 0$ няма решение, следователно $f(x) > 0$ няма решение и в $(p; q)$.

2) $D > 0$. Неравенството $f(x) > 0$ няма решения в интервала $(p; q)$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ са изпълнени следните случаи:

$$x_1 < x_2 \le p \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} D>0 \\ f(p)\le 0 \\ -\frac{b}{2a}<p \end{array}\right. \quad или \quad q \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} D>0 \\ f(q)\le 0 \\ q<-\frac{b}{2a} \end{array}\right. \qquad (17)$$

От 1) и 2) следва, че при $a < 0$ неравенството $f(x) > 0$ няма решение в интервала $(p; q)$, ако $D \le 0$, или ако е изпълнено (17). Изключваме тези стойности от интервала $(-\infty; +\infty)$ и намираме стойностите на параметъра, при които неравенството $f(x) > 0$ има едно решение в интервала $(p; q)$.

Крайните решения следват от А) и В).

Правило:

- Ако коефициентът пред x^2 зависи от параметъра, се разглеждат два случая: При $a = 0$ и проверяваме дали неравенството изпълнява даденото условие; При $a \ne 0$.
- Намираме D. Ако $D > 0$ за $\forall m$ или D е точен квадрат, долните разсъждения се опростяват.
- Определяме ориентацията на върха на параболата. Ако коефициентът пред x^2 зависи от параметъра се разглеждат два случая: При $a > 0$ и при $a > 0$. Прилагаме формули от (17) до (22) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства”, като се съобразяваме със знаците на a и неравенството (виж “Бележка 2”.
- Разглеждаме всички възможни разположения на корените x_1 и x_2 върху числовата ос според условието и върхът на параболата..
- Обединяваме всички възможни случаи.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

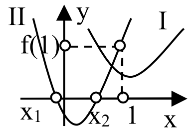
Зад. 11: Да се намерят стойностите на реалния параметър m, за които неравенството $f(x) = mx^2 + (m+1)x + m > 0$ е изпълнено за всяко $x > 1$.

Решение: В случая имаме Основна задача 2. Коефициентът пред x^2 зависи от параметъра затова разглеждаме следните случаи:

А) Ако $m = 0$. Даденото неравенство е $0x^2 + (0+1)x + 0 = x > 0$ и очевидно е изпълнено за $x > 1$. Следователно $m = 0$ е решение на задачата.

Нека сега $m \ne 0$. Изследваме в зависимост от ориентацията на върха на параболата като разглеждаме следните случаи:

В) Параболата е с връх надолу, т.е. $m > 0$. Намираме дискриминантата $D = (m+1)^2 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1 = (1-m)(3m+1)$. За нея можем да имаме следните случаи (Фиг. 20):



Фиг. 20

1) $D < 0 \Rightarrow (1-m)(3m+1) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. От (19) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от I на Фиг. 20 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са еднакви, то неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за $\forall x$, следователно то е изпълнено и за $\forall x > 1$. Като засечем с (В) получаваме, че при $m \in (1; +\infty)$ неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко $x > 1$.

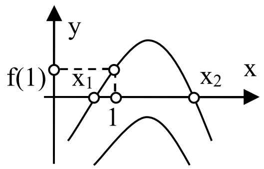
2) $D \ge 0$ (графика II на Фиг. 20). Неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за $\forall x > 1$, ако за корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$ е изпълнено (10):

$$x_1 \le x_2 \le 1 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} D \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ -\frac{b}{2a} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (1-m)(3m+1) \ge 0 \\ m + (m+1) + m \ge 0 \\ -\frac{m+1}{2m} \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \\ m \ge -\frac{1}{3} \\ m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup (0; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in (0; 1]$$

Като засечем с (В) получаваме, че при $m \in (0; 1]$ неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко $x > 1$.

От обединението на 1) и 2) следва, че при $m \in (0; +\infty)$ неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко $x > 1$.

С) Параболата е с връх нагоре, т.е. $m < 0$. В зависимост от D можем да имаме следните случаи:



Фиг. 21

1) $D \le 0 \Rightarrow (1-m)(3m+1) \le 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$. От (21) и (22) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” и от Фиг. 21 се вижда, че щом знаците на a и $f(x)$ са различни, то неравенството $f(x) > 0$ няма решение, следователно $f(x) > 0$ няма решение и за $x > 1$.

2) $D > 0$. От Фиг. 21 се вижда, че в този случай решенията на неравенството $f(x) > 0$ са крайният интервал $(x_1; x_2)$, и очевидно, $f(x) > 0$ не е изпълнено за всяко $x > 1$.

От 1) и 2) следва, че при $m < 0$ неравенството $f(x) > 0$ няма решение за $x > 1$.

Обединяваме решенията от А), В) и С) и получаваме, че неравенството $f(x)>0$

е изпълнено за всяко $x > 1$ при $m \in [0; +\infty)$.

Зад. 13: Да се намерят всички стойности на параметъра m, за които от неравенството $f(x) = (m-2)x^2 - x - m + 3 < 0$ следва неравенството $0 < x < 1$.

Решение: От поставеното условие следва, че всички решения на неравенството $f(x) < 0$ трябва да принадлежат на интервала от числа $(0; 1)$, т.е. имаме Основна задача 3. Разглеждаме два случая:

A) При $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ даденото неравенство е линейно. Заместваме и проверяваме дали изпълнява условието $0.x^2 - x - 2 + 3 < 0 \Leftrightarrow x > 1$. Всички решения не принадлежат на интервала $(0; 1)$, т.е. $m = 2$ не е решение.

B) При $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ даденото неравенство е квадратно. Намираме $D = 1 - 4(3-m)(m-2) = 4m^2 - 20m + 25 = (2m-5)^2$. Можем да продължим по два начина:

I начин

D е точен квадрат. Намираме корените на съответното квадратно уравнение $x_1 = \frac{1-(2m-5)}{2(m-2)} = \frac{3-m}{m-2}$ и $x_2 = \frac{1+2m-5}{2(m-2)} = \frac{2m-4}{2(m-2)} = \frac{2(m-2)}{2(m-2)} = 1$. Очевидно коренът $x_2 = 1$ не принадлежи на търсения интервал. По условие за другия корен трябва да е изпълнено $0 \le x_1 < 1$. Разглеждаме случаите:

1) При $a < 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$. Знаците на a и $f(x)$ са еднакви тогава от (19) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” определяме, че неравенството е изпълнено за $\forall x$, следователно даденото неравенството има решение за $\forall x$. По условие искаме всички решения да принадлежат на интервала $(0; 1)$. Затова изводът е, че при $m < 2$ даденото неравенство няма решение.

2) При $a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Знаците на a и $f(x)$ са различни тогава от Тема “Квадратни уравнения и неравенства” определяме, че даденото неравенство има решение. Това решение трябва да е между числата 0 и 1, т.е.

$$0 \le x < 1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{3-m}{m-2} < 1 \Rightarrow m \in \left(\frac{5}{2}; 3\right]$$

От A) и B) следва, че при $m \in \left(\frac{5}{2}; 3\right]$ всички решения на даденото неравенство принадлежат на интервала от числа $(0; 1)$.

II начин

Не намираме корените на даденото неравенство, а решаваме по алгоритъма, показан в Основна задача 3. Разглеждаме следните два случая:

1) При $a > 0 \Rightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$. Доказахме, че дискриминантата неможе да е отрицателна. Знаците на a и $f(x)$ са различни тогава от Тема “Квадратни уравнения и неравенства” определяме, че даденото неравенство няма решение при $D = 0$, а при $D > 0$ има решение $x \in (x_1; x_2)$,.като за тези корени по условие имаме изпълнено $p \le x_1 < x_2 \le q$. От (12) и Фиг. 12 следва:

$$\left|\begin{array}{l} D > 0 \\ f(0) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ p < -\frac{b}{2a} < q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} (2m-5)^2 > 0 \\ -m+3 \ge 0 \\ m-2-1-m+3 \ge 0 \\ 0 < \frac{1}{2(m-2)} < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \forall m \neq \frac{5}{2} \\ m \le 3 \\ \forall m \\ \frac{1}{m-2} > 0 \\ \frac{1}{2m-4} < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} m \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 3\right] \\ m-2 > 0 \\ \frac{5-2m}{m-2} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5}{2}; 3\right]$$

2) При $a < 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$. Знаците на a и $f(x)$ са еднакви тогава от (19) на Тема “Квадратни уравнения и неравенства” определяме, че неравенството е изпълнено за $\forall x$, следователно даденото неравенството има решение за $\forall x$. По условие искаме всички решения да принадлежат на интервала $(0; 1)$. Затова изводът е, че при $m < 2$ даденото неравенство няма решение.

От A) и B) следва, че при $m \in \left(\frac{5}{2}; 3\right]$ всички решения на даденото неравенство принадлежат на интервала от числа $(0; 1)$.

Зад

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".