Учебен център “СОЛЕМА”
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Люлин-3, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Логаритмични уравнения и неравенства

I. Логаритмична *функция*

Функция от вида $y = \log_a x$, където a е положително число, различно от 1, а x – променлива по-голяма от 0, се нарича логаритмична функция, т.е.

$$y = \log_a x,\ \text{ДМ: } \begin{cases} a \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ x \in (0;+\infty) \end{cases} \qquad (1).$$

Логаритмична функция с основа 10 се нарича десетичен логаритъм и вместо $\log_{10} x$ се използва означението $\lg x$.

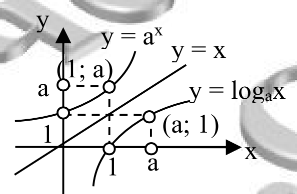
Логаритмична функция с основа неперовото число (e) се нарича натурален (естествен) логаритъм. Вместо $\log_e x$ се използва означението $\ln x$.

Като имаме предвид <u>(4) от уроци “Показателни уравнения и неравенства”</u> се оказва, че логаритмичната функция е обратна на показателната функция.

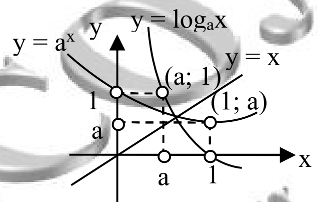
На фиг. 1 са представени графиките на обратните функции: $y = a^x$ и $y = \log_a x$, когато $a > 1$. На фиг. 2 са представени графиките на обратните функции: $y = a^x$ и $y = \log_a x$, когато $0 < a < 1$. Виждаме, че те са симетрични спрямо ъглополовящата на I и III квадрант.

a > 1		
x	1	a
y = log_ax	0	1

0 < a < 1		
x	a	1
y = log_ax	1	0



фиг. 1



фиг. 2

Разглеждайки графиката на логаритмичната функция, може да се изкажат следните свойства:

- Свойство 1 – графиката на функцията минава през точките с координати : $(1; 0)$ и $(a ; 1)$; т.е. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$;
- Свойство 2 – графиката е разположена в I и IV квадрант (“надясно” от оста Oy) т.е $x > 0$;
- Свойство 3 – Ако $a \in (0; 1)$, логаритмичната функция е намаляваща, като:
  - при $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$, т.е. стойностите на функцията са положителни (графиката е над абсцисната ос)
  - при $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$, т.е. стойностите на функцията са отрицателни (графиката е под абсцисната ос)
  - Най-голямата и най-малката стойност в даден интервал $[p; q]$ се намира от

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \max\limits_{x\in[p;q]} f(x) \\ \max\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \min\limits_{x\in[p;q]} f(x) \end{cases}$$
(2)

- Свойство 4 – Ако $a \in (1; +\infty)$, логаритмичната функция е растяща, като:
  - при $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$, т.е. стойностите на функцията са отрицателни (графиката е под абсцисната ос)
  - при $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$, т.е. стойностите на функцията са положителни (графиката е над абсцисната ос)
  - Най-голямата и най-малката стойност в даден интервал $[p; q]$ се намира от

$$\begin{cases} \min\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \min\limits_{x\in[p;q]} f(x) \\ \max\limits_{x\in[p;q]} y = \log_a \max\limits_{x\in[p;q]} f(x) \end{cases}$$
(3)

Правила:

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a} \qquad (4)$$
$$\log_a A = \frac{1}{\log_A a} \qquad (5)$$
$$\log_a A^n = n\log_a A \qquad (6)$$
$$\log_{a^m} A = \frac{1}{m}\log_a A \qquad (7)$$
$$\log_{a^m} a^n = \frac{n}{m} \qquad (8)$$
$$\log_a a^n = n \qquad (9)$$
$$\log_{a^n} A^n = \log_a A \qquad (10)$$
$$a^{\log_a A} = A \qquad (11)$$
$$a^{\log_b A} = A^{\log_b a} \qquad (12)$$
$$\log_a (A.B) = \log_a A + \log_a B \qquad (13)$$
$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \qquad (14)$$

Бележки:

1. Формулите от (4) до (14) са в сила, когато: $A>0$ (в (5) и (11) $A\neq1$), $B>0$, $a>0$ и $a\neq1$, $b>0$ и $b\neq1$.
2. Основната формула за смяна на основата (4) често се използва и във вида
$\log_b a . \log_a A = \log_b A$ (15)

- **Свойство 5** – Всяка права успоредна на оста Ox пресича графиката на функцията $y = \log_a x$ само в една точка. Следователно логаритмичната функция е обратима.

Зад. 1: Да се намери най-малката стойност на функцията $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(-x^2+4x-3\right)$

Решение: Като сравним с (1) виждаме, че $0 < a < 1 \Rightarrow$ функцията y е намаляваща (т.е. ще използваме (2)) и я изследваме за най-малката стойност в интервала на Д.М. Затова намираме Д.М.: $-x^2+4x-3>0 \Rightarrow x\in(1;\,3)$ и полагаме $f(x) = -x^2+4x-3$. Графиката на тази функция е парабола с върха нагоре (защото $a = -1$). Затова максималната и стойност е в точката $-\dfrac{b}{2a}$, т.е.:

$$\max_{x\in(1;3)} f(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=f(2)=-4+8-3=1 \Rightarrow \min_{x\in(1;3)} y=\log_{\frac{1}{3}}1=0\cdot$$

Зад. 2: Намерете стойностите на параметъра m, при които уравнението $\log_3 x+\left(m^2-1\right)\log_x 3+2m+3=0$, има реални корени, по малки от 1.

Решение: Определяме $Д.М.: \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1\end{cases}$. По условие се интересуваме само от тези корени, които са по-малки от 1, затова разглеждаме интервала (0; 1). Сменяме основата в даденото уравнение $\log_3 x+\dfrac{m^2-1}{\log_3 x}+2m+3=0$. *Полагаме* $\log_3 x = y$ и получаваме уравнението $y+\dfrac{m^2-1}{y}+2m+3=0 \Leftrightarrow y^2+(2m+3)y+m^2-1=0 \quad (A)$. За да решим това уравнение, трябва да намерим в какви граници се изменя y. От полагането виждаме, че основата на логаритъма е по-голяма от 1, т.е. логаритмичната функция е растяща (фиг. 1). По условие $x\in(0;\,1)$, тогава от фиг. 1 и Свойство 4 следва, че $y < 0$, т.е. уравнение (A) трябва да има реални корени, за които е изпълнено $y_1 \le y_2 < 0$. Условието числото 0 да е надясно от двата корена е

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ f(0)>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2-4\left(m^2-1\right)\ge 0 \\ m^2-1>0 \\ -\dfrac{2m+3}{2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m+13\ge 0 \\ (m-1)(m+1)>0 \\ 2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -\dfrac{13}{12} \\ m\in(-\infty;\,-1)\cup(1;\,+\infty) \\ m>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$m\in\left[-\frac{13}{12};\,-1\right)\cup(1;\,+\infty)$$

II. Логаритмични уравнения

Уравнение, в което неизвестното се намира под знака на логаритъм, се нарича логаритмично уравнение. Уравнение от вида: $\log_a f(x)=b$, където $f(x) > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b \in R$, се нарича основно логаритмично уравнение.

Решаването на логаритмични уравнения се свежда до решаването на уравнения от следните два вида:

1) Основно уравнение – решава се по следния начин

$$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow a^b = f(x), \text{ където ДМ: } \begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ f(x)>0 \end{cases} \qquad (16)$$

2) Уравнение, при което от двете страни на равенството имаме логаритъм при една и съща основа – решава се по следната схема

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x), \text{ където ДМ: } \begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \qquad (17)$$

Бележка:

При решаването на уравнения (16) и (17) може и да не се търси ДМ, но при намирането на корените задължително се проверява кои от тях са решение на даденото уравнение.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

- Уравнение от вида (16)

Зад. 4: $\log_3(x^2-4)^2=2$

Решение: ДМ: $(x^2 - 4)>0 \Leftrightarrow \forall x_{1/2}\neq\pm2$

$$\log_3\left(x^2-4\right)^2=2 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)^2=3^2 \Leftrightarrow \left(x^2-7\right)\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1/2}=\pm1\\ x_{3/4}=\pm\sqrt{7}\end{cases}$$

Бележка:

Тази задача може да се реши и ако използваме формула (6). Ако я приложим по следния начин: $\log_3(x^2-4)^2=2 \Leftrightarrow 2.\log_3(x^2-4)=2$ |: 2 $\Leftrightarrow \log_3(x^2-4)=1 \Leftrightarrow x^2-4=3 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{7}$, губим две решения. Това е така, защото формула (6) е вярна само при $A>0$. Затова в общия случай (какъвто е нашият), формула (6) трябва да има следния вид: $\log_a A^n=n.\log_a|A|$ (18)
Дадената задача се решава с помощта на формула (18):
$\log_3(x^2-4)^2=2 \Leftrightarrow 2.\log_3|x^2-4|=2 \Leftrightarrow \log_3|x^2-4|=1 \Leftrightarrow |x^2-4|=3 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm1,\ x_{3/4}=\pm\sqrt{7}$

- Уравнение от вида (17)

Зад. 5: $\log_3(x^2 - 7x + 11) = \log_3(x - 4)$

Решение: $Д.М.:\begin{vmatrix} x^2-7x+11>0\\ x-4>0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x\in\left(-\infty;\dfrac{7-\sqrt5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7+\sqrt5}{2};+\infty\right)\\ x>4\end{vmatrix} \Leftrightarrow$
$x\in\left(\dfrac{7+\sqrt5}{2};+\infty\right)$

Основите са еднакви от двете страни на равенството и прилагаме (17):
$x^2 - 7x + 11 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$; $x_1 = 3\notin$ДМ; $x_2 = 5\in$ДМ, т.е. даденото уравнение има един корен $x = 5$.

- Решаване чрез полагане

Зад. 7: $5\log_{\frac{x}{9}} x+\log_{\frac{9}{x}} x^3+8\log_{9x^2} x^2=2$ (МГУ, 2006)

Решение: $Д.М.:\begin{vmatrix} x>0\\ x\neq9\\ x\neq\dfrac13\end{vmatrix} \Leftrightarrow x\in\left(0;\dfrac13\right)\cup\left(\dfrac13;9\right)\cup(9;+\infty)$

Сменяме основата и преобразуваме:

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9\frac{x}{9}}+\frac{\log_9 x^3}{\log_9\frac{9}{x}}+\frac{8\log_9 x^2}{\log_9\left(9x^2\right)}=2 \Leftrightarrow \frac{5\log_9 x}{\log_9 x-\log_9 9}+\frac{3\log_9 x}{\log_9 9-\log_9 x}+\frac{16\log_9 x}{\log_9 9+2\log_9 x}=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9 x-1}+\frac{3\log_9 x}{1-\log_9 x}+\frac{16\log_9 x}{1+2\log_9 x}=2.$$ *Полагаме* $\log_9 x=y$ *и получаваме*

$$\frac{5y}{y-1}+\frac{3y}{1-y}+\frac{16y}{1+2y}=2 \Leftrightarrow \frac{5y}{y-1}-\frac{3y}{y-1}+\frac{16y}{1+2y}=2.\quad Д.М._y:\forall y\neq-\frac12,1$$

$$4y^2+2y+16y^2-16y=4y^2-2y-2 \Rightarrow 8y^2-6y+1=0 \Rightarrow y_1=\frac12;\ y_2=\frac14$$

Тогава A) $\log_9 x=\dfrac12 \Leftrightarrow x=9^{\frac12} \Leftrightarrow x=3\in Д.М.$

B) $\log_9 x=\dfrac14 \Leftrightarrow x=9^{\frac14} \Leftrightarrow x=\sqrt3\in Д.М.$

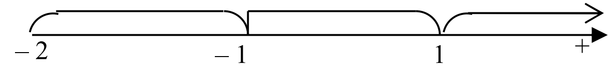
Бележка:

При преобразуванията на уравненията в Зад. 7 и Зад. 9 за смяна на основата сме използвали формула (6), а не (18), защото ДМ е положително число. Ако в ДМ се включваха и отрицателни числа, то задължително трябваше да използваме (18).

- Модулни уравнения

Зад. 13: $\lg|x - 1| = 1 - |\lg(x+2)|$

Решение:. ДМ: $\begin{vmatrix} x-1\neq0\\ x+2>0\end{vmatrix} \Leftrightarrow x\in(-2;1)\cup(1;+\infty)$. Анулираме изразите под модул
$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $\lg(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 10^0 \Leftrightarrow x = -1$. Разделяме ДМ на подинтервали и определяме знака на всеки модул. Резултатите са показани в долната таблица



x – 1	– – –		– – –		0	+ + +
lg(x+2)	– – –	0	+ + +			+ +

Разглеждаме следните случая:

адрес: гр.София, ж.к. Люлин-3, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

A) При $x\in(-2;-1)$. Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида $\lg[-(x-1)]=1+\lg(x+2)\Leftrightarrow \lg(1-x)-\lg(x+2)=1\Leftrightarrow \lg\dfrac{1-x}{x+2}=1\Leftrightarrow \dfrac{1-x}{x+2}=10^1\Leftrightarrow$

$11x=-19\Leftrightarrow x=-\dfrac{19}{11}\in(-2;-1)\Rightarrow x=-\dfrac{19}{11}$ *е решение*

B) При $x\in[-1;1)$. Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида $\lg[-(x-1)]=1-\lg(x+2)\Leftrightarrow \lg(1-x)+\lg(x+2)=1\Leftrightarrow(1-x)(x+2)=10^1\Leftrightarrow x^2+x+8=0$; $D=1-32<0\Rightarrow$ даденото уравнение няма решение при $x\in[-1;1)$.

C) При $x\in(1;+\infty)$. Като отчетем горната таблица даденото уравнение има вида $\lg(x-1)=1-\lg(x+2)\Leftrightarrow \lg(x-1)+\lg(x+2)=1\Leftrightarrow(x-1)(x+2)=10^1\Leftrightarrow x^2+x-12=0$; $x_1=-4\notin(1;+\infty)$, $x_2=3\in(1;+\infty)\Rightarrow$ даденото уравнение има решение $x=3$

От A), B) и C) следва, че решенията на даденото уравнение са $x_1=-\dfrac{19}{11};\quad x_2=3$

- Уравнения в които се използва формулата за смяна на основата във вида (15):

Зад. 14: $\log_{x+1}3.\log_{2x+1}(x+1)+\log_{x+1}(x^2-2x+6).\log_{2x+1}(x+1)=2$.

<u>Решение:</u>.

$$Д.М._x:\left|\begin{array}{l}x+1>0\\x+1\neq1\\2x+1>0\\2x+1\neq1\\x^2-2x+6>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x>-1\\x\neq0\\x>-\frac{1}{2}\\x\neq0\\\forall x\ (\text{защото } D<0)\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;+\infty)$$

Преобразуваме даденото уравнение по следния начин: $[\log_{x+1}3+\log_{x+1}(x^2-2x+6)].\log_{2x+1}(x+1)=2\Leftrightarrow \log_{x+1}3(x^2-2x+6).\log_{2x+1}(x+1)=2$. Използваме формула (15) и получаваме $\log_{2x+1}(3x^2-6x+18)=2\Leftrightarrow 3x^2-6x+18=(2x+1)^2\Leftrightarrow 3x^2-6x+18=4x^2+4x+1\Leftrightarrow x^2+10x-17=0$;

$x_1=-5-\sqrt{42}\notin ДМ$; $x_2=\sqrt{42}-5\in ДМ$. Следователно $x=\sqrt{42}-5$ е решение на даденото уравнение.

- Параметрични уравнения

Зад. 15: Да се реши уравнението $\log_a x+\log_{\sqrt{x}}a\,|a+\log_a x|=a\log_x a$, където a е реален параметър.

<u>Решение:</u>. $Д.М._x:\left|\begin{array}{l}x>0\\x\neq1\end{array}\right.;\quad Д.М._a:\left|\begin{array}{l}a>0\\a\neq1\end{array}\right.$. На всички логаритми определяме основа a. $\log_a x+\dfrac{2}{\log_a x}|a+\log_a x|=\dfrac{a}{\log_a x}\Leftrightarrow \log_a^2 x+2|a+\log_a x|-a=0$. Полагаме $\log_a x=y$ и горното уравнение добива вида $y^2+2|a+y|-a=0$ (C). Премахваме модула като разглеждаме два случая:

A) При $a+y<0\Leftrightarrow y<-a$, уравнение (C) добива вида $y^2-2(a+y)-a=0\Leftrightarrow y^2-2y-3a=0$. Решенията му са $y_1=1+\sqrt{1+3a}$; $y_2=1-\sqrt{1+3a}$. Проверяваме кои от тези решения изпълняват условието (A):

1) $1+\sqrt{1+3a}<-a\Leftrightarrow\sqrt{1+3a}<-a-1$. За да е изпълнено това неравенство трябва да е изпълнено $-a-1>0\Leftrightarrow a<-1\notin Д.М._a$. Следователно корена $y_1=1+\sqrt{1+3a}$ не е решение на даденото уравнение.

2) $1-\sqrt{1+3a}<-a\Leftrightarrow\sqrt{1+3a}>1+a$. Това неравенство се решава като решим следните две системи:

а) $\left|\begin{array}{l}1+3a\geq0\\1+a\leq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a\geq-\frac{1}{3}\\a\leq-1\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in\varnothing$

б) $\left|\begin{array}{l}1+a>0\\\left(\sqrt{1+3a}\right)^2>(1+a)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a>-1\\a^2-a<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a>-1\\a\in(0;1)\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in(0;1)\in Д.М._a$

От 1) и 2) следва, че при $a\in(0;1)$ решението е $y=1-\sqrt{1+3a}$. Като заместим в полагането получаваме $\log_a x=1-\sqrt{1+3a}\Leftrightarrow x=a^{1-\sqrt{1+3a}}$

B) При $a+y\geq0\Leftrightarrow y\geq-a$, уравнение (C) добива вида $y^2+2(a+y)-a=0\Leftrightarrow y^2+2y+a=0$. Решенията му са $y_1=-1+\sqrt{1-a}$; $y_2=-1-\sqrt{1-a}$. Проверяваме кои от тези решения изпълняват условието (B):

1) $-1+\sqrt{1-a}\geq-a\Leftrightarrow\sqrt{1-a}\geq1-a$. Разглеждаме следните две системи:

а) $\left|\begin{array}{l}1-a\geq0\\1-a<0\end{array}\right.\Leftrightarrow Н.Р.$

б) $\left|\begin{array}{l}1-a\geq0\\\left(\sqrt{1-a}\right)^2\geq(1-a)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a\leq1\\a^2-a\leq0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a\leq1\\a\in[0;1]\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in(0;1)\in Д.М._a$

2) $-1-\sqrt{1-a}\geq-a\Leftrightarrow\sqrt{1-a}\leq a-1\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}1-a\geq0\\a-1\geq0\\\left(\sqrt{1-a}\right)^2\leq(a-1)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a\leq1\\a\geq1\\a^2-a\leq0\end{array}\right.\Leftrightarrow a=1\notin Д.М._a$

От 1) и 2) следва, че при $a \in (0; 1)$ решението е $y = -1 + \sqrt{1-a}$. Като заместим в полагането получаваме $\log_a x = \sqrt{1-a} - 1 \Leftrightarrow x = a^{\sqrt{1-a}-1}$

От A) и B) следва, че даденото уравнение при $a \in (0; 1)$ има две решения $x_1 = a^{\sqrt{1-a}-1}$; $x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$, а при $a \in (1; +\infty)$ – няма решения.

Зад. 16: Намерете при кои стойности на параметъра a, уравнението $\frac{1}{2}\lg(ax) = \lg(x+1)$ има точно едно решение.

<u>Решение:</u>. $Д.М._x: \begin{cases} x+1>0 \\ ax>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ ax>0 \end{cases}$. Решаваме даденото уравнение $\lg(ax) = 2\lg(x+1) \Leftrightarrow \lg(ax) = \lg(x+1)^2 \Leftrightarrow ax = (x+1)^2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - (a-2)x + 1 = 0 \quad (C)$. Даденото уравнение, за да има точно едно решение, то за уравнение (C) имаме следните случаи:

A) $\begin{cases} D=0 \\ x>-1 \\ ax>0 \end{cases}$. $D = (a-2)^2 - 4 = a^2 - 4a = 0$; $a_1 = 0$, $a_2 = 4$. При $a_1 = 0$ не е изпълнено $ax>0$, следователно $a_1 = 0$ не е решение на даденото уравнение. При $a_1 = 4$ даденото уравнение има вида $\frac{1}{2}\lg(4x) = \lg(x+1)$ и има точно един корен $x = 1$, следователно $a_1 = 4$ е решение на даденото уравнение.

B) Уравнение (C) има две решения, но единият корен е по-малък от – 1, т.е. числото – 1 е между двата корена. Това е възможно, когато е изпълнено $1.f(-1) < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (-1)(a-2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 + a - 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow a < 0$

От A) и B) следва, че даденото уравнение има точно едно решение при $a \in (-\infty; 0) \cup \{4\}$.

- Графично решаване

Зад. 17: $\log_2 x = 3 - x$.

<u>Решение:</u>.ДМ: $x > 0$. Лявата страна на даденото уравнение е растяща логаритмична функция (защото основата 2 > 1), а дясната – намаляваща функция. Следователно двете функции ще се пресичат само в една точка (може и да не се пресичат) т.е. решението (ако има такова) на даденото уравнение е само едно. С непосредствена проверка установяваме, че $x = 2$ е корен на уравнението.

III. Логаритмични неравенства

Неравенство, в което неизвестното се намира под знака на логаритъм, се нарича логаритмично неравенство, т.е. неравенство от вида $\log_a f(x) > b$, където $f(x) > 0$, $a \neq 1$, $a > 0$, $b \in R$.

Решаването на логаритмични неравенства се свежда до решаването на неравенства от следните два вида:

Бележка:

Както всички неравенства, така и логаритмичните, започват да се решават със задължително намиране на ДМ.

1) Неравенство от вида $\log_a f(x) < b$, където $Д.М.: \begin{cases} f(x)>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ (19)

Решаването му зависи от вида на основата:

- Ако $0 < a < 1$, то имаме $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) > a^b$, (20)
  т.е. знакът на неравенството се променя;
- Ако $a > 1$, то имаме $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow f(x) < a^b$, (21)
  т.е. знакът на неравенството се запазва;

2) Неравенство от вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, където $Д.М.: \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$ (22)

Решаването му зависи от вида на основата:

- Ако $0 < a < 1$, то имаме $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, (23)
  т.е. знакът на неравенството се променя;
- Ако $a > 1$, то имаме $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, (24)
  т.е. знакът на неравенството се запазва;

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

- Неравенство от вида (19)

Зад. 18: $\log_2(x + 3) - \log_2(2x - 1) > 5 - \log_3 9$.

Решение:. $Д.М.: \begin{cases} x+3>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Преобразуваме даденото неравенство използвайки свойствата на логаритмите и получаваме $\log_2\frac{x+3}{2x-1}>3$.

Основата е 2 > 1 и прилагаме (21)

$\log_2\frac{x+3}{2x-1}>3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-1}>2^3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2x-1}-8>0 \Leftrightarrow \frac{x+3-16x+8}{2x-1}>0 \Leftrightarrow (11-15x)(2x-1)>0 \Leftrightarrow$
$x\in\left(\frac{1}{2};\frac{11}{15}\right)\in Д.М.$

Зад. 21: $x^{2-\log_3^2 x-\log_3 x^2}>\frac{1}{x}$

Решение:.ДМ: $x > 0$.

I начин

Логаритмуваме двете страни на даденото неравенство при основа 3 и преобразуваме $\log_3 x^{2-\log_3^2 x-\log_3 x^2}>\log_3\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[2-\log_3^2 x-2\log_3 x\right].\log_3 x>-\log_3 x$

Полагаме $\log_3 x = y$ и получаваме $(2 - y^2 - 2y).y + y > 0 \Leftrightarrow y(y^2 + 2y - 3) < 0$
$\Leftrightarrow y\in(-\infty; -3)\cup(0; 1)$. Разглеждаме следните случаи:

A) $y\in(-\infty; -3)$, тогава от полагането следва $\log_3 x < -3 \Leftrightarrow x < 3^{-3} \Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)$.

B) $y\in(0; 1)$, тогава от полагането следва $\begin{cases} \log_3 x>0 \\ \log_3 x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3^0 \\ x<3^1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3)$.

От A) и B) получаваме крайните решения $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup(1;3)$.

II начин

Преобразуваме до $x^{2-\log_3^2 x-\log_3 x^2}>x^{-1}$. Имаме показателно неравенство с основа зависеща от неизвестното, затова разглеждаме следните случаи:

A) $\begin{cases} 0<x<1 & (1) \\ 2-\log_3^2 x-\log_3 x^2<-1 & (2) \end{cases}$

2) $2 - \log_3^2 x - 2\log_3 x < -1 \Leftrightarrow \log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 > 0$. Полагаме $\log_3 x = y$ и получаваме квадратното неравенство $y^2 + 2y - 3 > 0$. Решенията му са $y \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. От полагането получаваме:

а) При $y < -3 \Rightarrow \log_3 x < -3 \Leftrightarrow x<\frac{1}{27}$. Засичаме с (1) и получаваме решенията $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)$

б) При $y > 1 \Rightarrow \log_3 x > 1 \Leftrightarrow x > 3 \notin (0; 1)$.

От а) и б) следва, че в този случай даденото неравенство има решение $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)$

$B)\begin{cases} x>1 \\ 2-\log_3^2 x-\log_3 x^2>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_3^2 x+2\log_3 x-3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\in\left(\frac{1}{27};3\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;3)$

Обединяваме решенията от (А) и (В), т.е. $x\in\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup(1;3)$

Задачи за упражнение: