Показателни уравнения и неравенства

I. Показателна *функция*

Функция от вида $y = a^x$, където a е положително число различно от 1, а x – променлива се нарича показателна функция $\Rightarrow y = a^x$,

ДМ: $\begin{cases} a \in (0;1)\cup(1;+\infty) \\ \forall x \end{cases}$ (1).

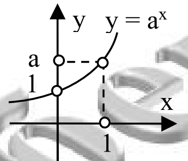
При $a = 1$ показателната функция е равна на 1 (защото $y = 1^x = 1$ за $\forall x$). Затова при $a = 1$, графиката на показателната функция е права линия успоредна на абсцисната ос и минаваща през точка с координата $a(0 ; 1)$.

При $a > 1$ показателната функция има графика показана на Фиг.1.

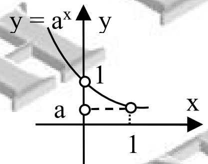
При $0 < a < 1$ показателната функция има графика показана на Фиг.2.

a > 1		
x	0	1
y = a^x	1	a

0 < a < 1		
x	0	1
y = a^x	1	a



фиг. 1



фиг. 2

От графиката на показателната функция следват свойства:

- Свойство 1 – Графиката на функцията минава през точките с координати: (0; 1) и (1 ; a) т.е. $a^0 = 1$ и $a^1 = a$;
- Свойство 2 – Графиката е разположена в I и II квадрант (“над” оста Ox) т.е $a^x > 0$ за $\forall x$;
- Свойство 3 – Ако $a \in (0; 1)$, то функцията $y = a^{f(x)}$ е намаляваща, като:
  - При $x < 0$ стойностите на показателната функция са по-големи от 1 т.е. $a^x > 1$;
  - При $x > 0$ – са по-малки от 1, т.е. $0 < a^x < 1$;
  - Най-голямата и най-малка стойност на функцията в даден интервал

    [p; q] се намира от $\begin{cases} \min\limits_{x\in[p;q]} y = a^{\max\limits_{x\in[p;q]} f(x)} \\ \max\limits_{x\in[p;q]} y = a^{\min\limits_{x\in[p;q]} f(x)} \end{cases}$ (2).
- Свойство 4 – Ако $a \in (1; +\infty)$, то функцията $y = a^{f(x)}$ е растяща, като:
  - При $x < 0$ стойностите на показателната функция са по-малки от 1 т.е. $0 < a^x < 1$;
  - При $x > 0$ – са по-големи от 1 т.е. $a^x > 1$;
  - Най-голямата и най-малка стойност на функцията в даден интервал

    [p; q] се намира от $\begin{cases} \min\limits_{x\in[p;q]} y = a^{\min\limits_{x\in[p;q]} f(x)} \\ \max\limits_{x\in[p;q]} y = a^{\max\limits_{x\in[p;q]} f(x)} \end{cases}$ (3).
- Показателната функция $y = a^x$ няма най-малка и най-голяма стойност.
- Свойство 5 – Всяка права “над” оста Ox и успоредна на нея пресича графиката на функцията $y = a^x$ само в една точка, а всяка права “под” оста Ox няма обща точка с графиката на функцията $y = a^x$.

Зад. 1: Да се намери най-голямата стойност на функцията $y = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{x^2-4x+6}$

Решение: Преобразуваме функцията: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2-12x+18}$. Тази функция е показателна с основа $a = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < a < 1$, т.е функцията y е намаляваща. Нека степенният показател да означим с $f(x) = 3x^2 - 12x + 18$. ДМ: $\forall x$ (защото $\left| \begin{array}{l} a = 3 > 0 \\ D < 0 \end{array} \right.$). От Свойство 2 следва, че за да решим задачата трябва да намерим $\max\limits_{\forall x} y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\min\limits_{\forall x} f(x)}$. Функцията f(x) е квадратна $\Rightarrow$ графиката и е парабола, $a = 3 > 0 \Rightarrow$ параболата е с върха надолу. От Свойство 3 на квадратна функция от Уроци “Квадратни уравнения и Неравенства” следва, че най-малката и стойност е в точката $-\frac{b}{2a}$ т.е:

$\min\limits_{\forall x} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 3.2^2 - 12.2 + 18 = 6$. Тогава $\max\limits_{\forall x} y = \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow \max\limits_{\forall x} y = \frac{1}{3^6}$.

2. Показателни уравнения

Уравнение, в което неизвестното е в степенния показател, се нарича показателно уравнение.

Основни показателни уравнения:

$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$, където a > 0, a ≠ 1, b > 0 (4).

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$, ако a > 0, a ≠ 1 (5).

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow \log_a\left(a^{f(x)}\right) = \log_a\left(b^{g(x)}\right)$, ако a, b > 0 и a, b ≠ 1 (6).

Запомнете:

При показателните уравнения, уравненията $y = 0^0$ и $y = 0$, са в неопределена форма. 7

Следват избрани задачи от

Основни типови задачи:

♦ Уравнения с равни основи::

Зад. 1: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x-3,5} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Решение: Горното уравнение се преобразува като използваме (5):

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^3 - \underbrace{2x}_{4x-2x} - 3,5 = 0,5 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \cup x^2+2x+2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Но $x^2+2x+2 = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a = 1 > 0 \\ D = 1-2 = -1 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \forall x$. Следователно решенията на даденото уравнение са x = 2.

♦ Уравнение от вида (4):

Зад. 3: $3^{4x+2} = 7$

Решение: То се решава като логаритмуваме двете му страни при подходяща основа (не забравяйте, че уравнение от вида (4) има решение, само когато b > 0):

$$\log_3 3^{4x-2} = \log_3 7 \Rightarrow (4x-2)\log_3 3 = \log_3 7 \Rightarrow 4x-2 = \log_3 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(2 + \log_3 7\right)$$

♦ Уравнения от вида:

$Aa^x + Bb^x = 0$ (15).

Това уравнение се решава като разделим двете му страни с a^x или b^x:

Зад. 4: $2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+0,5} + 3^{x-0,5}$

Решение:

$$4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x.\sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$4^x\left(1 + \frac{1}{2}\right) == 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$4^x.\frac{3}{2} = 3^x.\frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{4^x}{3^x} = \frac{8}{3.\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\sqrt{64}}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{4^3}}{3^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

♦ Уравнения от вида: $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ (16).

Това уравнение е квадратно спрямо a^x. Решава се чрез полагането: $a^x = y$, където $y > 0$, и решаваме полученото квадратно уравнение спрямо y. След това разглеждаме само положителните корени на y.

Зад. 7: $2^{2(x^2-x)-3} = 1 + 2^{x^2-x-2}$

Решение:

$$2^{2(x^2-x)-3} = 1 + 2^{x^2-x-2} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2^{2(x^2-x)}}{2^3} - \frac{2^{x^2-x}}{2^2} - 1 = 0}_{8} \Leftrightarrow \left(2^{x^2-x}\right)^2 - 2.2^{x^2-x} - 8 = 0$$

полагаме: $2^{x^2-x} = y;\ \text{Д.М}_y.: y > 0$ и от горното уравнение получаваме:

$$y^2 - 2y - 8 = 0; D = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = 3; \begin{cases} y_1 = -2 \notin \text{Д.М}_y. \\ y_2 = 4 \in \text{Д.М}_y. \end{cases}$$

Запомнете:

Тук използваме свойствата:

$(a^m)^n = a^{m.n}$ 8

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 9

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ 10

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 11

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ 12

$a^n.a^m = a^{n+m}$ 13

$a^n.b^n = (a.b)^n$ 14

И от полагането получаваме: $2^{x^2-x}=2^2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2=2\end{cases}$.

♦ Уравнения от вида: $Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0$ (17).

Това уравнение се решава като разделим двете му страни с a^{2x} или b^{2x}.

Зад. 9: $5^{2x^2-6x+2}=2^{2x^2-6x+2}-21.10^{x^2-3x}$

Решение:

$$5^2.5^{2x^2-6x}=2^2 2^{2x^2-6x}-21.10^{x^2-3x}\Rightarrow 25.5^{2(x^2-3x)}+21.5^{x^2-3x}.2^{x^2-3x}-4.2^{2(x^2-3x)}.$$

Делим двете страни на $2^{2(x^2-3x)}$: $25.\left(\frac{5}{2}\right)^{2(x^2-3x)}+21.\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x}-4.=0$. Полагаме:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x}=y;\ Д.М_y.: y>0\Rightarrow 25y^2+21y-4=0\Rightarrow\begin{cases}y_1=-1\notin Д.М_y.\\ y_2=\frac{4}{25}\in Д.М_y.\end{cases}$$, от полагането:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x}=\frac{4}{25}\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$$

♦ Уравнения от вида (6):

Това уравнение се решава като логаритмуваме двете му страни при основа a или b:

Зад. 10: $3.2^x=5.7^{2x}$

Решение: Логаритмуваме при основа 2 и за решаването на полученото уравнение използваме свойствата на логаритмите:

$$\log_2(3.2^x)=\log_2(5.7^{2x})\Rightarrow\log_2 3+\log_2 2^x=\log_2 5+\log_2 7^{2x}\Rightarrow\log_2 3+$$
$$+x.\log_2 2=\log_2 5+2x.\log_2 7\Rightarrow x-2x.\log_2 7=\log_2 5-\log_2 3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(1-2\log_2 7)=\log_2\frac{5}{3}\Rightarrow x=\frac{\log_2\frac{5}{3}}{\log_2 2-\log_2 7^2}\Rightarrow x=\frac{\log_2\frac{5}{3}}{\log_2\frac{2}{49}}$$

♦ Уравнение при което в основата и в степенния показател имаме неизвестно, т.е. от вида: $f(x)^{g(x)}=f(x)^{q(x)}$, (18)

където f(x), g(x) и q(x) са функции на x

То се решава като се разгледат следните четири случая:

A) Когато f(x) = – 1 т.е. заместваме основата с – 1, и решаваме уравнение (18). Ако се получи вярно равенство, то получената стойност за x е решение на уравнението;

B) Когато f(x) = 0, повтаряме по-горе описаната процедура;

C) Когато f(x) = 1, повтаряме по-горе описаната процедура;

D) Сега вече сме сигурни, че f(x) е различно от горните стойности, затова решаваме показателното уравнение (18)

Обединяваме решенията получени от A), B), C) и D).

Зад. 11: $(x+2)^{x^2}=(x+2)^{x+1}$

Решение: Разглеждаме следните случаи:

A) x + 2 = – 1 ⇒ x = – 3. Заместваме в условието и получаваме:

$(-1)^{(-3)^2}=(-1)^{-3+1}\Leftrightarrow(-1)^9\neq(-1)^{-2}\Leftrightarrow x=-3$ не е решение.

B) x + 2 = 0 ⇒ x = – 2. Заместваме в условието и получаваме:

$0^{(-2)^2}=0^{-2+1}\Leftrightarrow 0^4\neq 0^{-1}\Leftrightarrow x=-2$ не е решение.

C) x + 2 = 1 ⇒ x = – 1. Заместваме в условието и получаваме:

$1^{(-1)}=1^{-1+1}\Leftrightarrow 1=1^0\Leftrightarrow x=-1$ е решение.

D) Уравнението е от вида (I.5), затова можем да запишем:

$$x^2=x+1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

От A), B), C) и D) ⇒ $x_1=-1$ и $x_{2/3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ са всички решения.

♦ Графично решаване – Графично се решават показателни уравнения в които неизвестното се съдържа, както в степенен показател, така и в свободен вид:

Зад. 13: $3^x=1-x$

Решение: Отчитайки (4), определяме ДМ: 1 – x > 0 ⇒ x < 1. Нека лявата страна означим с функцията f(x) = 3^x, а дясната страна – g(x) = 1 – x. Ако построим графиката на двете функции се вижда, че f(x) е растяща, а g(x) – намаляваща. Затова, очевидно, двете функции ще се пресичат в една точка, т.е. дадената задача има едно решение. Непосредствено проверяваме, че x = 0 е решение, защото $3^0=1-0\Rightarrow 1=1$.

Ще докажем, че уравнението не притежава друг корен:

A) Нека x < 0, тогава: 0 < f(x) < 1, а g(x) > 1, т.е уравнението няма корен в интервала $(-\infty;0)$.

B) Нека x > 0, тогава: f(x) > 1, а g(x) < 1, т.е уравнението няма корен в интервала $(0;+\infty)$.

От A) и B) следва, че x = 0 е единственото решение на задачата.

♦ Параметрични уравнения

адрес: гр.София, ж.к. Люлин-3, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Зад. 15: Намерете стойностите на параметъра а, за които уравнението $9^{x-1}-4.3^{x-1}-1+2a=0$ има точно едно решение.

Решение: Преобразуваме даденото уравнение по следния начин: $3^{2x}-12.3^{x}+18a-9=0$. Полагаме $3^x = y$, където Д.М.$_y$: $y > 0$ и уравнението добива вида $y^2 - 12y + 18a - 9 = 0$ (22)

(нека общия вид на квадратното уравнение е $Ay^2 + By + C = 0$) (23)

Първи начин:

Решаваме (22) и от решенията определяме търсените стойности на параметъра. Разглеждаме следните случаи :

А) $D=0 \Rightarrow D=36-18a+9=45-18a=0 \Rightarrow a=\frac{5}{2}$. Тогава коренът на горното уравнение е $y = 6 \in ДМ_y$, т.е. при $a=\frac{5}{2}$.даденото уравнение има едни корен.

В) При $D > 0$ корените са два:

1) $y_1=6-\sqrt{45-18a}$. За да принадлежи на ДМ$_y$ той трябва да е положителен, т.е. решаваме:

$$6-\sqrt{45-18a}>0 \Leftrightarrow \sqrt{45-18a}<6 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}45-18a\ge 0\\45-18a<36\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}a\le \frac{5}{2}\\a>-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$$

2) $y_2=6+\sqrt{45-18a}$. За да принадлежи на Д.М.$_y$ той трябва да е положителен т.е. решаваме: $6+\sqrt{45-18a}>0 \Leftrightarrow \sqrt{45-18a}>-6 \Leftrightarrow \forall a\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]$

От А) и В) следва, че:

При $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ уравнението има един корен y_2.

При $a\in\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ уравнението има два корена y_1 и y_2 .

При $a=\frac{5}{2}$ уравнението има един корен $y_1 = y_2$.

При $a\in\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$ уравнението няма решение.

От тук получаваме, че при $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{5}{2}\right\}$ даденото уравнение има един корен.

Втори начин:

Не решаваме уравнение (22), а използваме формулите на Виет. Като отчетем полагането (ДМ$_y$: $y > 0$) и изискването даденото показателно уравнение да има едно решение, то следва, че уравнение (22) трябва да има само един положителен корен (а другият корен или не съществува или е отрицателен или нула). Затова разглеждаме следните случаи:

А) За уравнение (23), ако $A = 0$, то ще има един корен от вида $y=-\frac{C}{B}>0$

За уравнение (22) тази стъпка не се изпълнява, защото А не зависи от параметъра.

В) При $A \neq 0$ уравнение (23) има един положителен корен, ако $\left|\begin{array}{l}D=0\\y=-\frac{B}{2A}>0\end{array}\right.$ (24)

Затова в нашия случай получаваме: $\left|\begin{array}{l}D=45-18a=0\\y=6>0\end{array}\right. \Rightarrow a=\frac{5}{2}$

С) При $A \neq 0$ уравнение (23) има един положителен корен, а другият е отрицателен или нула, ако $\left|\begin{array}{l}D>0\\y_1.y_2\le 0\end{array}\right. \Rightarrow y_1.y_2\le 0$.

За нашия случай използвайки формулите на Виет можем да запишем $2a-1\le 0 \Rightarrow a\le\frac{1}{2}$.

От А), Б) и С) следва, че при $a\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{5}{2}\right\}$ уравнението има един корен.

Трети начин:

Този начин е свързан с разпределение на корените на уравнение (22) върху числовата ос. От ДМ$_y$ следва, че числото 0 се намира между корените на (22). Затова в него полагаме $f(x) = y^2 - 12y + 18a - 9$ и разглеждаме два случая:

А) Уравнение (22) има един положителен корен. За целта решаваме система(24) и получаваме: $a=\frac{5}{2}$.

В) Уравнение (22) има два корена, от които само единият е положителен, т.е единият корен да принадлежи на интервала $(0;+\infty)$ а другият да е извън него (От урока "Разпределение на корените на квадратно уравнение и квадратно неравенство" знаем, че число $\alpha \in (x_1; x_2)$, когато е изпълнено неравенството $A.f(\alpha) < 0$). (25)

В нашия случай ще имаме и равенство, защото един от корените може и да е 0 т.е: $1.f(0) \le 0 \Rightarrow 18a - 9 \le 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$

От А) и В) следва, че исканите решения са при $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$

3. Показателни неравенства

Неравенство, в което неизвестното е в степенен показател, се нарича показателно неравенство.

Използвайки свойствата на показателната функция, можем да запишем следните основни неравенства:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{при } a > 1 \\ f(x) > g(x) & \text{при } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad (27)$$

Основни типове задачи:

Основните типове неравенства са същите, както и основните типове уравнения с тази разлика, че при неравенства се използва (27), а не от (4) до (6).

Зад. 19: $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

Решение: Преобразуваме неравенството по следния начин:

$$3^x.\sqrt{3} + \frac{3^x}{\sqrt{3}} > 4^x.\sqrt{4} - \frac{4^x}{2} \Leftrightarrow 3^x.\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 4^x.\left(2 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 3^x.\frac{4}{\sqrt{3}} > 4^x.\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3^x}{4^x} > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{64}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4^3}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".