Системи уравнения и Редици

Системи *уравнения*

I. Системи уравнения от първа степен с две неизвестни

Решават се чрез:

1. Заместване – Решават се по следния начин:
   - a) от едното уравнение се изразява едното неизвестно;
   - b) заместваме в другото уравнение и го решаваме;
   - c) намерената стойност на неизвестното се замества в израза от a).
2. Събиране – Решават се по следния начин:
   - a) умножаваме едното уравнение (или двете уравнения) с подходящо число така, че след събирането им едното неизвестно да се съкрати (най-често това са коефициентите пред неизвестното, което искаме да съкратим, но с обратен знак);
   - b) събираме двете уравнения и решаваме полученото уравнение;
   - c) полученото неизвестно се замества в едно от уравненията на системата.

Например:

$$\left|\begin{aligned}&2x-y=1\,|.(-3)\\&3x+7y=2\,|.2\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&-6x+3y=-3\\&6x+14y=4\end{aligned}\right\}+\Rightarrow 17y=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{17};\ 2x-\frac{1}{17}=1\Leftrightarrow x=\frac{9}{17}$$

Решението е двойката числа: $\left(\frac{9}{17};\frac{1}{17}\right)$

II. Системи уравнение от втора степен с две неизвестни

Теорема 1:

При замяна на кое да е уравнение от една система с еквивалентно уравнение се получава еквивалентна система.

Например: $\left|\begin{aligned}&x-y=1\,|.(-1)\\&2x^2-y=4\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&-x+y=-1\\&2x^2-y=4\end{aligned}\right.$

Теорема 2:

Ако едното уравнение в дадена система S е еквивалентно на две уравнения, то дадената система S е еквивалентна на две системи S_1 и S_2, във всяка от които едното уравнение е заменено с едното еквивалентно уравнение, а другото остава същото.

Например: $\left|\begin{aligned}&x^3+y^3=3(x+y)\\&x^2+y^2=7\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&(x+y)(x^2-xy+y^2)-3(x+y)=0\\&x^2+y^2=7\end{aligned}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{aligned}&(x+y)(x^2-xy+y^2-3)=0\\&x^2+y^2=7\end{aligned}\right.$

Тази система се разделя на две системи: $\left|\begin{aligned}&x+y=0\\&x^2+y^2=7\end{aligned}\right.$ (1)

и $\left|\begin{aligned}&x^2-xy+y^2-3=0\\&x^2+y^2=7\end{aligned}\right.$ (2)

Те се решават по описаните по-долу начини.

В математиката универсален начин за решаване на системи от този вид не са познати. Възможно е да се използват подходящи методи за решаване на определени групи системи. Тези групи са следните:

- ♦ Ако едното уравнение в системата е от първа степен, а другото е от втора степен – От уравнението от първа степен изразяваме едното неизвестно и го заместваме във второто уравнение. След решаването му намираме стойностите на второто неизвестно. Система от този тип е системата (1):

$$\left|\begin{aligned}&x+y=0\Rightarrow x=-y\\&x^2+y^2=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow(-y)^2+y^2=7\Leftrightarrow 2y^2=7\Leftrightarrow y_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{7}{2}};x_{1/2}=\mp\sqrt{\frac{7}{2}}$$

- ♦ Ако неизвестните в системата участват чрез едни и същи симетрични изрази. Най-често тези изрази са: $x+y$; $x.y$; $x-y$; x^2-y^2; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{y}$ и т.н. Тези изрази се полагат като нови неизвестни и най-напред се решава получената за тях система.

Зад. 1: Да се реши системата уравнения: $x^2+y^2+x+y=14$ и $x^2+y^2+xy=7$

Решение: Тази система се решава, като в лявата страна на първото уравнение прибавим и извадим едно и също число $2xy$, а във второто уравнение – прибавим и извадим число xy:

$$\begin{vmatrix} x^2+2xy+y^2-2xy+x+y=14 \\ x^2+2xy+y^2-xy=7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x+y)^2-2xy+(x+y)=14 \\ (x+y)^2-xy=7 \end{vmatrix}$$

$$\textit{Полагаме}: \begin{vmatrix} x+y=u \\ x.y=v \end{vmatrix} \Rightarrow \textit{Тогава}: \left.\begin{vmatrix} u^2+u-2v=14 \\ u^2-v=7 \Rightarrow v=u^2-7 \end{vmatrix}\right\} \Rightarrow u^2+u-2(u^2-7)=14 \Leftrightarrow u(1-u)=0$$

Оттук следва, че $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$. и съответно $v_1 = -7$ и $v_2 = -6$. Разглеждаме следните два случая:

$$A)\left.\begin{vmatrix} x+y=0 \Rightarrow x=-y \\ x.y=-7 \end{vmatrix}\right\} \Rightarrow -y.y=-7 \Leftrightarrow y^2=7 \Leftrightarrow y_{1/2}=\pm\sqrt{7}; x_{1/2}=\mp\sqrt{7}$$

$$B)\left.\begin{vmatrix} x+y=1 \Rightarrow x=1-y \\ x.y=-6 \end{vmatrix}\right\} \Rightarrow y(1-y)=-6 \Leftrightarrow y^2-y-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-2 \\ y_2=3 \end{cases} \cap \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-2 \end{cases}$$

Окончателните решения на дадената система са двойката числа:
$(\pm\sqrt{7};\mp\sqrt{7}); (-2;3); (3;-2)$

- ♦ Ако неизвестните участващи в уравненията са само от втора степен: Чрез подходящи преобразувания от двете уравнения получаваме уравнение от първа степен, което заедно с едното уравнение на дадената система образуват еквивалентна система.

Зад. 2: Да се реши системата уравнения: $2x^2-4y^2-1,5x+y=0$ и $3x^2-6y^2-2x+2y=0,5$

Решение: Тази система се преобразува, като първото уравнение се умножи с 3, а второто – с (–2) и получаваме:

$$\left.\begin{vmatrix} 6x^2-12y^2-4,5x+3y=0 \\ -6x^2+12y^2+4x-4y=-1 \end{vmatrix}\right\}+ \Rightarrow -\frac{1}{2}x-y=-1 \Leftrightarrow x+2y=2$$

. Така полученото уравнение заедно с второто уравнение от дадената система образуват нова система:

$$\begin{vmatrix} x+2y=2 \\ 3x^2-6y^2-2x+2y=0,5 \end{vmatrix}$$

. Решаваме я чрез заместване и получаваме следните решения за дадената система: $\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(-3;\frac{5}{2}\right)$

- ♦ Системи, в които едното уравнение е хомогенно, а другото е произволна функция.

Определение 1:

Степен на едночлен се намира като съберем степените на неизвестните.

Например: Едночлена $3xy$ е от втора степен, а едночлена x^2y е от трета степен

Определение 2:

Многочлен, в който всички едночлени са от една и съща степен, се нарича хомогенен многочлен (хомогенна функция).

Например: Функцията x^2+xy+y^2 е хомогенна, защото всички едночлени са от втора степен. Функцията $x^3+2x^2y+y^3$ е хомогенна, защото всички едночлени са от трета степен.

Определение 3:

Уравнение, лявата страна на което е хомогенна функция, а дясната е равна на нула, се нарича хомогенно уравнение.

Например: Уравнението $x^2-2xy+3y^2=0$ е хомогенно от втора степен, а уравнението $x^3-3x^2y-3xy^2-y^3=0$ е хомогенно от трета степен, но уравнението $x^2-2xy+3y=0$ не е хомогенно, защото третият едночлен не е от втора степен.

Нека да имаме системата
$$\begin{vmatrix} ax^2+bxy+cy^2=0 \\ f(x,y)=0 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

където $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, са произволни числа, а $f(x,y)$ е произволна функция. Тя се решава по следния алгоритъм:

Правило 1:

1. Пресмятаме $f(0,0)$, т.е. допускаме, че $y=0$, заместваме във второто уравнение и ако получим, че и $x=0$, то $x=0$ и $y=0$ са решения на дадената система. Ако получим, че $x \neq 0$, то x и y не може едновременно да са нули т.е $x \neq 0$ или $y \neq 0$.
2. Разделяме хомогенното уравнение на y^2 (или x^2) и получаваме: $a\frac{x^2}{y^2}+b\frac{x}{y}+c=0$. Полагаме $\frac{x}{y}=z$ и получаваме квадратно уравнение спрямо z т.е. $az^2+bz+c=0$. Нека z_1 и z_2 са корените му. Тогава система (3) се разпада на следните две системи: $\begin{cases}\frac{x}{y}=z_1\\ f(x,y)=0\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{x}{y}=z_2\\ f(x,y)=0\end{cases}$. Решенията им са решения и на дадената система.

- Системи уравнения, при които и в двете уравнения левите страни са хомогенни функции, а десните има числа са различни от нула, се решават, като въведем ново неизвестно, което е равно на отношението между двете неизвестни в системата. Например:

Зад. 4: Да се реши системата уравнения: $3x^2-2xy+y^2=36$ и $5x^2-4xy+y^2=20$

Решение: Полагаме $y=t.x$ и получаваме системата $\begin{cases}3x^2-2tx^2+t^2x^2=36\\ 5x^2-4tx^2+t^2x^2=20\end{cases}$. Делим двете уравнения и получаваме:

$\frac{3x^2-2tx^2+t^2x^2}{5x^2-4tx^2+t^2x^2}=\frac{9}{5} \Leftrightarrow \frac{x^2(3-2t+t^2)}{x^2(5-4t+t^2)}=\frac{9}{5} \Leftrightarrow 5(3-2t+t^2)=9(5-4t+t^2) \Leftrightarrow 2t^2-13t+15=0$. Решенията му са: $t_1=5$ и $t_2=1,5$. Разглеждаме следните две системи:

$A).\begin{cases}y=5x\\ 5x^2-4xy+y^2=20\end{cases}$. Решаваме я чрез заместване. Решенията и са наредената двойка числа $(\sqrt{2};5\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2};-5\sqrt{2})$.

$B).\begin{cases}y=\frac{3x}{2}\\ 5x^2-4xy+y^2=20\end{cases}$. Решаваме я чрез заместване. Решенията и са наредената двойка числа $(4;\ 6)$ и $(-4;\ -6)$.

Решенията на A) и B) са решения и на дадената система.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 5: Да се реши системата уравнения: $\frac{3}{x^2+y^2-1}+\frac{2y}{x}=1$ и $x^2+y^2+\frac{4x}{y}=22$

Решение: В дадената система участват симетрични изрази, затова полагаме $\begin{cases}x^2+y^2=u\\ \frac{x}{y}=v\end{cases}$ и получаваме системата $\begin{cases}\frac{3}{u-1}+\frac{2}{v}=1\\ u+4v=22\end{cases}$. От второто уравнение изразяваме u и го заместваме в първото уравнение:

$\frac{3}{21-4v}+\frac{2}{v}=1 \Leftrightarrow 3v+42-8v=21v-4v^2 \Leftrightarrow 2v^2-13v+21=0 \Leftrightarrow \begin{cases}v_1=3\\ v_2=3{,}5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u_1=10\\ u_2=8\end{cases}$. Разглеждаме следните два случая:

$A)\begin{cases}x^2+y^2=10\\ \frac{x}{y}=3\end{cases}$. Решението и е двойката числа: $(3;\ 1)$ и $(-1;\ -3)$.

$B)\begin{cases}x^2+y^2=8\\ \frac{x}{y}=3{,}5\end{cases}$. Решението и е двойката числа: $\left(14\sqrt{\frac{2}{53}};4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$ и $\left(-14\sqrt{\frac{2}{53}};-4\sqrt{\frac{2}{53}}\right)$.

Решенията на дадената система са двойките числа от A) и B).

Зад. 9: Да се реши системата уравнения: $x^{2y+5}=27$ и $9x^{y-1}=1$

Решение: Коренуваме двете страни на второто уравнение:

$\sqrt{9}.\sqrt{x^{y-1}}=1 \Leftrightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{x^{y-1}}} \Leftrightarrow 3=\sqrt{x^{1-y}}$ и заместваме във първото:

$x^{2y+5}=3^3 \Leftrightarrow x^{2y+5}=\left(\sqrt{x^{1-y}}\right)^3=x^{\frac{3(1-y)}{2}} \Leftrightarrow 2y+5=\frac{3-3y}{2} \Leftrightarrow y=-1 \Rightarrow 3=\sqrt{x^{1+1}} \Leftrightarrow x=3$. Решенията на дадената система е наредената двойка числа $(3;\ -1)$.

Зад. 10: Дадена е системата уравнения: $y-x=a(1+xy)$ и $2xy+x+y+1=0$. За кои стойности на параметъра a системата има само едно решение? (УНСС, 1992)

Решение: Преобразуваме системата по следния начин:

$\begin{vmatrix} y-x=a+axy \mid .2 \\ 2xy+x+y=-1 \mid .a \end{vmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{vmatrix} -2axy+2y-2x=2a \\ 2axy+ay+ax=-a \end{vmatrix}\right\}+ \Leftrightarrow (2+a)y+(a-2)x=a$. Това уравнение заедно с второто уравнение от дадената система образуват нова система, която е еквивалентна на дадената: $\begin{vmatrix} (2+a)y+(a-2)x=a \\ 2xy+x+y+1=0 \end{vmatrix}$ (6)

Тази система ще има единствено решение в следните три случая:

A) Когато коефициентът пред едното неизвестно е нула, т.е. $a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$, тогава от първото уравнение получаваме $x=-\frac{1}{2}$ и заместваме във второто уравнение, за да получим другото неизвестно: $y=-\frac{3}{4}$

B) Когато коефициентът пред другото неизвестно е нула, т.е. $a-2=0 \Leftrightarrow a=2$, тогава от първото уравнение получаваме $y=\frac{1}{2}$ и заместваме във второто уравнение, за да получим другото неизвестно: $x=-\frac{3}{4}$

C) В случаите, когато коефициентите пред неизвестните в първото уравнение на система (6) са различни от нула, можем да решим системата чрез заместване. От първото уравнение изразяваме x и заместим във второто:

$\frac{2ya-2y^2(2+a)}{a-2}+\frac{a-(2+a)y}{a-2}+y+1=0 \Leftrightarrow (a+2)y^2-(a-2)y-(a-1)=0$. Това уравнение има само едно решение когато $D=0$: $D=(a-2)^2+4(a+2)(a-1)=5a^2-4=0 \Leftrightarrow a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

От A), B) и C) следва, че при $a=\pm 2 \cap a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ дадената система има само едно решение.

Редици

Нека да имаме естествените числа 1, 2, …, n и на всяко от тях да съпоставим произведението му с числото 3. Така получаваме следната редица от числа 3, 6, 9, …, 3n. т.е.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ 3 & 6 & 9 & 12 & & 3n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & & f(n) \end{array}.$$

Определение 1:

Множеството от числа (или отсечки или др.) съпоставено по някакво правило на естествените числа 1, 2, …, n, се нарича числова редица.

Членовете на редицата се отбелязват по следния начин: първият член с a_1, вторият член – a_2 и т.н. до $n^{\text{тият}}$ член – a_n. Числото a_n се нарича общ ($n^{\text{-ти}}$) член на редицата. В горния пример общия член е зададен с помощта на формулата $a_n = 3n$. Ако една редица е зададена с формулата за общия си член, може да запишем редицата $\{a_n\}$ или в горния пример $\{3n\}$.

I. Видове редици:

- Крайни: когато се знае последният им член;
- Безкрайни: редица, за която не се знае последният член.

II. Начини за задаване на редици:

- Чрез формулата на общия член (аналитично) – Например: Ако имаме $a_n=\frac{n+1}{n}$, редицата е $2;\frac{3}{2};\frac{4}{3};\ldots;\frac{n+1}{n}$;
- Словесно (описателно) – Например: на естествените числа съпоставяме простите числа 2, 3, 5, …;
- С рекурентна зависимост – Задава се първият член a_1 и връзката между два съседни члена на редицата (т.е. задава се първият член и правилото за получаване на всеки следващ). Например: Ако $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + n$, редицата е 1, 3, 6, 10, ….

III. Монотонност:

- Растяща редица:

Определение 2:

Една редица е растяща (строго растяща), когато всеки неин член след първия е по-голям или равен на предходния, т.е. $a_{n+1} \geqslant a_n$. (за строго растяща редица имаме $a_{n+1} > a_n$).

- Намаляваща редица:

Определение 3:

Една редица е намаляваща (строго намаляваща), когато всеки неин член след първия е по-малък или равен на предходния, т.е. $a_{n+1} \le a_n$. (за строго намаляваща редица имаме $a_{n+1} < a_n$).

Всяка растяща или намаляваща редица се нарича монотонна.

От горните определения следва, че за да се докаже монотонността на редица достатъчно е да се изследва знака на разликата $a_{n-1} - a_n$. Ако тя е положителна – редицата е растяща, ако е отрицателна – редицата е намаляваща. В някои случаи е по-удобно да определим монотонност на редица като делим два съседни члена, т.е. образуваме частното $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ и ако то е по-голямо от 1, редицата е растяща, ако е по-малко от 1 редицата е намаляваща.

IV. Ограничена редица:

Определение 4:

Редицата е ограничена отгоре, ако съществува число ε, за което имаме изпълнено $a_n \le \varepsilon$, за всяко n.
Редицата е ограничена отдолу, ако съществува число ε, за което имаме изпълнено $a_n \geqslant \varepsilon$ за всяко n.

Прогресии

I. Аритметична прогресия:

Определение:

Числова редица, в която всеки член след първия се получава като към предходния му се прибавя едно и също число d (което число се нарича разлика на аритметичната прогресия), т.е. $a_{n+1} = a_n + d \Leftrightarrow d = a_{n+1} - a_n$.

От определението следва, че при $d > 0$ аритметичната прогресия е растяща, а при $d < 0$ – намаляваща.

Прието е аритметичната прогресия да се означава със знака $\div$.

Теореми:

Теорема 1 (за общия член): Ако имаме аритметична прогресия с първи член a_1 и разлика d, то за всеки член е в сила равенството: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Теорема 2 (за сумата на първите n члена): Нека да имаме аритметичната прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$, с разлика d, то сумата S_n на членовете и е $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$ или $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}.n$.

Свойства:

Свойство 1: За три последователни члена на аритметичната прогресия е в сила равенството: $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$, т.е. всеки член без първия е средно аритметично на съседните му два члена.

Свойство 2: За коя да е аритметична прогресия са в сила равенствата: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}$, т.е. сумата на два члена, равноотдалечени от крайните й членове, е равно на сумата на двата крайни члена.

II. Геометрична прогресия:

Определение:

Числова редица, на която всеки член след първия се получава като предходният му се умножи с едно и също число q (което число се нарича частно на геометричната прогресия), т.е. $b_{n+1} = b_n.q \Rightarrow q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, ако $b_n \neq 0$.

От определението следва, че при $q > 1$ геометричната прогресия е растяща, при $0 < q < 1$ – намаляваща, а при $q < 0$ – нито растяща нито намаляваща. Ако $q = 1$ – всички членове са равни, ако $q = 0$ и $a_1 \neq 0$ – всички членове след първия са равни на нула (например: 4, 0, 0, …,) ако $q = -1$ – прогресията се състои от една двойка противоположни числа (например: –2, 2, –2, 2, …,). Геометрични прогресии с $q = 0$ и $q = \pm 1$ не представляват интерес и затова полагаме, че $q \neq 0$ и $q \neq \pm 1$.

Прието е геометричната прогресия да се означава със знака $\div\!\div$.

Теореми:

Теорема 1 (за общия член): Ако имаме геометрична прогресия с първи член a_1 и разлика q, то за всеки член е в сила равенството: $b_n = b_1.q^{n-1}$.

Теорема 2 (за сумата на първите n члена): Нека да имаме $\div\div$ $b_1, b_2, \dots, b_n$, с частно $q \neq 1$, то сумата S_n на членовете и е $S_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1} = b_1\frac{1-q^n}{1-q}$ или $S_n = \frac{b_nq-b_1}{q-1} = \frac{b_1-b_nq}{1-q}$. **БЕЛЕЖКА**: При $q > 1$ е удобно да се използват първите части от горните формули, а при $q < 1$ – вторите части.

Теорема 3 (за произведението на първите n члена):): Нека да имаме $\div\div$ $b_1, b_2, \dots, b_n$, с частно $q \neq 1$, то произведението Π_n на членовете и е $\Pi_n = b_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Теорема 4 (сума на безкрайно малка намаляваща $\div\div$): Нека да имаме безкрайно малката намаляващата $\div\div$ $b_1, b_2, \dots, b_n \dots$, с частно $|q| < 1$, тогава $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Свойства:

Свойство 1: За три последователни члена на геометрична прогресия е в сила равенството: $b_k^2 = b_{k+1}.b_{k-1}$, т.е. всеки член без първия е средно геометрично на съседните му два члена.

Свойство 2: За коя да е геометрична прогресия са в сила равенствата: $b_1.b_n = b_2.b_{n-1} = \dots = b_k.b_{n-k+1}$, т.е. произведението на два члена, равноотдалечени от крайните й членове, е равно на произведението на двата крайни члена.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 4: Три числа, сборът на които е 42, образуват геометрична прогресия с частно, по-голямо от 1. Ако към първото прибавим 2, а от третото извадим 8, ще получим аритметична прогресия. Намерете числата.

Решение:

I начин:

Нека трите числа на аритметичната прогресия да означим с $x-y$, x, $x+y$, тогава, имайки предвид условието (че от първото число на $\div$ трябва да извадим 2, а към третото – да прибавим 8), търсените числа са $\div\div$ $x-y-2$, x, $x+y+8$. За тази прогресия отчитаме условието и Свойство 1 и получаваме системата:

$$\left|\begin{aligned}&(x-y-2)+x+(x+y+8)=42 \Rightarrow x=12\\&x^2=(x-y-2)(x+y+8)\end{aligned}\right\} \Rightarrow 12^2=(10-y)(20+y) \Leftrightarrow y^2+10y-56=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -14 \end{cases}$$

Получихме следните две прогресии: $\div\div$ 6, 12, 24 и $\div\div$ 24, 12, 6. От определението за първата от тях намираме частно q=2>1, а за втората – q=0,5<1. По условие, частното трябва да е по-голямо от единица, следователно търсените числа са 6, 12, 24.

II начин:

Използвайки Следствие 1 за членовете на търсената геометрична прогресия, получаваме: $\div\div$ b_1, b_1q, b_1q^2., при ограничение за частното q>1. По условие за тези числа имаме $b_1+b_1q+b_1q^2=42$ (2). Също по условие за аритметичната прогресия имаме: $\div$ b_1+2, b_1q, b_1q^2-8. За тази прогресия прилагаме Свойство 1: $2b_1q=(b_1+2)+(b_1q^2-8) \Leftrightarrow b_1q^2-2b_1q+b_1=6$. Това уравнение и уравнение (2) образуват система:

$$\left|\begin{aligned}&b_1(1+q+q^2)=42\\&b_1(q^2-2q+1)=6\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \frac{b_1(1+q+q^2)}{b_1(q^2-2q+1)}=7 \Rightarrow 6q^2-15q+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 2 > 1 \\ q_2 = \frac{1}{2} < 1 \end{cases}; b_1 = 6.$$

Търсените числа са: 6, 12, 24.

Зад. 6: От четири числа първите три образуват аритметична прогресия, а последните три – геометрична прогресия. Намерете числата, ако сборът на двете средни числа е 10, а сборът на двете крайни е 11.

Решение: Нека първото число е x, а второто число – y. Тогава търсените числа са: x, y, 10–y, 11–x. За членовете на прогресиите имаме:

1) $\div$ x, y, 10–y. От Теорема 1 следва: $2y=x+10-y \Leftrightarrow x=3y-10$.

2) $\div\div$ y, 10–y, 11–x. От Теорема 1 следва: $(10-y)^2=y(11-x) \Leftrightarrow y^2-31y+yx+100=0$.

Заместване x от (1) и след преобразуване уравнението добива вида $4y^2-41y+100=0$. Решенията му са $y_1 = 4$ и $y_2 = \frac{25}{4}$.

Заместваме в (1) и получаваме стойностите на другото неизвестно:
$x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{35}{4}$. Тогава търсените числа са следните две редици от числа:
$2, 4, 6, 9;$ и $\frac{35}{4}, \frac{25}{4}, \frac{15}{4}, \frac{9}{4}$.

Бележка:

За намиране сумата от квадратите на първите n члена на геометрична прогресия може да използваме формулата $S_n = a_1^2 \frac{(q^n)^2 - 1}{q^2 - 1}$ (8)

Зад. 10: Да се намери за кои стойности на x числата $\lg 6, \lg(2^x + 1), \lg\left(2^x + \frac{1}{6}\right)$, взети в този ред са последователни членове на аритметична прогресия.

Решение: Използвайки Свойство 1 на аритметичната прогресия, записваме:

$$\lg(2^x+1) = \frac{\lg 6 + \lg\left(2^x + \frac{1}{6}\right)}{2} \Leftrightarrow 2\lg(2^x+1) = \lg 6\left(2^x + \frac{1}{6}\right);\ Д.М.: \forall x \text{ и } 2^x > 0$$

$$\lg(2^x+1)^2 = \lg(6.2^x+1) \Leftrightarrow (2^x+1)^2 = 6.2^x + 1 \Leftrightarrow 2^{2x} - 4.2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x(2^x - 4) = 0$$

1) $2^x = 0 \Rightarrow Н.Р.$

2) $2^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

От 1) и 2) следва, че x=2 е решение на задачата.

Зад. 15: Намерете общия член на редица $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{\sqrt{5}}{26}, \frac{\sqrt{7}}{80}, \ldots$.

Решение: За да съставим формула за дадената редица, удобно е да разсъждаваме по следният начин:

- Знаците се сменят циклично започвайки с минус, затова в a_n трябва да има множител $(-1)^n$.
- В числител имаме нечетни числа, подредени във възходящ ред като в числител на втората дроб имаме корен, т.е. $\sqrt{2n-1}$.
- Знаменателите изпълняват връзката $3^n - 1$.

В крайна сметка получихме $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{3^n - 1}$.

Бележки:

1. Ако в редицата имаме циклично сменящи се знаци, започвайки с плюс, то във формулата за общия член трябва да има множител $(-1)^{n+1}$.
2. Ограничена редица от четни числа има общ член $a_n = 2n$, а от нечетни числа – $a_n = 2n - 1$.

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".