Триъгълник – Теорема на Талес. Подобни триъгълници. Ъглополовящи. Медиани. Височини и симетрали.

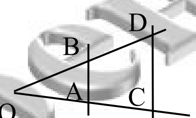
Бележка:

Навсякъде в долните формули се използват следните означения: AB=c, AC=b, BC=a, $\sphericalangle A=\alpha$, $\sphericalangle B=\beta$, $\sphericalangle C=\gamma$, m_a, m_b, m_c – медиани към съответните страни; l_a, l_b, l_c – ъглополовящи към съответните страни; h_a, h_b, h_c – височини към съответните страни; r - радиуса на вписаната окръжност; R – радиус на описаната окръжност; P – периметър, S – ли-

I. Теорема на Талес

- Права теорема – Ако AB||CD (Фиг. 1), то

  (1): $\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{OC}{OA}$



Фиг.1

- Следствие – Ако AB||CD (Фиг. 1), то

  (2): $\dfrac{BD}{OB}=\dfrac{AC}{OA}$

Доказателство:

- От Фиг. 1 $\Rightarrow$ OD = OB + BD; OC = OA + AC;
- От (1) $\Rightarrow \dfrac{OB+BD}{OB}=\dfrac{OA+AC}{OA}\Rightarrow\dfrac{OB}{OB}+\dfrac{BD}{OB}=\dfrac{OA}{OA}+\dfrac{AC}{OA}\Rightarrow 1+\dfrac{BD}{OB}=1+\dfrac{AC}{OA}\Rightarrow$ $\dfrac{BD}{OB}=\dfrac{AC}{OA}$

- Обратна теорема на Талес – Ако $\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{OC}{OA}$ (Фиг. 1), то AB||CD.

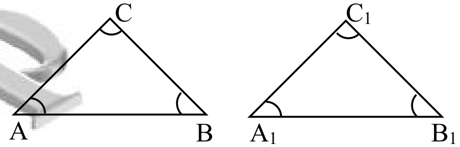
II. Подобни триъгълници

- Определение – Ако $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$, то $\sphericalangle A=\sphericalangle B=\sphericalangle C$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=k$,

  където k е коефициент на подобие (Фиг. 2)

- I признак – Ако два ъгъла от един триъгълник са съответно равни на два ъгъла от друг триъгълник, то триъгълниците са подобни, т.е. (Фиг. 2):
  Ако $\sphericalangle A=\sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle B=\sphericalangle B_1 \Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.

- II признак – Ако две страни от един триъгълник са съответно пропорционални на две страни от друг триъгълник и ъглите, заключени между тях са равни, то триъгълниците са подобни, т.е. (Фиг.2):
  Ако $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$ и $\sphericalangle B=\sphericalangle B_1 \Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.



Фиг.2

- III признак – Ако страните на един триъгълник са съответно пропорционални на страните на друг триъгълник, то триъгълниците са подобни, т.е. (Фиг.2):
  Ако $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$.

- IV признак (само за правоъгълни триъгълници) – Два правоъгълни триъгълника са подобни, ако катет и хипотенуза от един триъгълник са съответно пропорционални на катет и хипотенуза от друг триъгълник, т.е.
  $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{c}{c_1}\Leftrightarrow \Delta\sim\Delta_1$

- Свойства на подобни триъгълници – Ако $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$, то

  (3): $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{h_c}{h_{c_1}}=\dfrac{m_c}{m_{c_1}}=\dfrac{l_c}{l_{c_1}}=\dfrac{r}{r_1}=\dfrac{R}{R_1}=\dfrac{P}{P_1}$

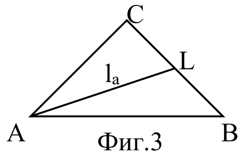
  (4): $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\dfrac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}}=k^2$

III. Ъглополовящи в триъгълник

- Ъглополовящите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която е център на вписаната в триъгълника окръжност.
- Свойства (Фиг. 3):

  (5): Ако $\sphericalangle LAB=\sphericalangle LAC \Leftrightarrow \dfrac{BL}{LC}=\dfrac{AB}{AC}$.

  (6): l_a^2 = AB.AC – BL.CL.



Фиг.3

(7): $l_a^2 = bc - \dfrac{bca^2}{(b+c)^2}$

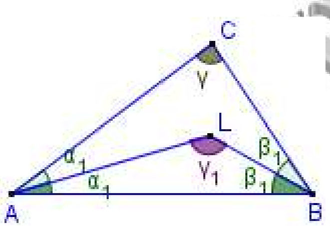
Бележка:

1. Формули (6) и (7) може да се запишат и за ъглополовящите към другите страни в триъгълника.
2. Други формули за ъглополовяща виж Зад. № 4 от Тема „Лице на триъгълник".

Основни задачи:

Зад. 1: Даден е триъгълник ΔABC, при които: ∢ACB = γ, Ъглополовящите на върховете A и B се пресичат в т. L. Да се намери ∢ALB.

Решение: Нека ∢ALB = γ_1



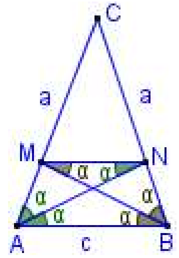
- AL и BL са ъглополовящи ⇒ ∢BAL = ∢LAC = α_1, ∢ABL = ∢LBC = β_1.
- От теорема за сбор на ъгли в ΔABC ⇒ $2\alpha_1 + 2\beta_1 + \gamma = 180^0 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 = \dfrac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \dfrac{\gamma}{2}$.
- От теорема за сбор на ъгли в ΔABL ⇒ $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 180^0 \Rightarrow \gamma_1 = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1) = 180^0 - \left(90^0 - \dfrac{\gamma}{2}\right) = 90^0 + \dfrac{\gamma}{2}$.
- ∢ALB = $\gamma_1 = 90^0 + \dfrac{\gamma}{2}$.

Зад. 2: Даден е равнобедрения ΔABC със страни AB = c, BC = AC = a. Ъглополовящите при върховете A и B пресичат страните BC и AC съответно в точките N и M.

а) Да се докаже, че MN е успоредна на AB.

б) Намерете дължината на отсечката MN.

Решение:



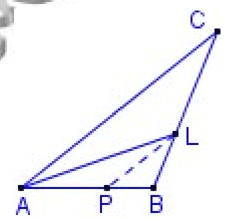
а) ΔMBC ~ ΔANC (по I признак, защото ∢C – общ, ∢MBC = ∢NAC = α – по условие) ⇒ $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \dfrac{CM}{BC} = \dfrac{CN}{AC}$, но AC = BC ⇒ $\dfrac{CM}{AC} = \dfrac{CN}{BC}$ и от Обратна теорема на Талес ⇒ MN || AB.

б) В а) доказахме, че MN || AB ⇒ ∢ANM = ∢NAB = α и ∢ABM = ∢MBN = α, т.е. ΔAMN и ΔMBN – равнобедрени или AM = MN = BN = x. Тогава CM = CN = AC – AM = a – x.

- ΔMNC ~ ΔABC (по I признак, защото ∢C – общ и ∢CMN = ∢CNM – като съответни ъгли на MN || AB) ⇒ $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{AC} \Rightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow x = MN = \dfrac{a\,c}{a+c}$.

Зад. 3: (Матура, 2010): Даден е ΔABC със страни AB = c и AC = b. Построена е ъглополовящата AL (L ∈ BC) и през точка L е построена права LP (P ∈ AB) и LP || AC. Намерете отношението $S_{\Delta LPB} : S_{\Delta ABC}$.

Решение:



- AL – ъглополовяща на ∢A ⇒ $\dfrac{CL}{BL} = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{CL}{BL} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow CL = \dfrac{b}{c} BL$;
- ΔABC ~ ΔPBL (по I признак) защото:
  - ∢B – общ;
  - ∢LPB = ∢CAB (като съответни ъгли на AC || PL);
- BC = CL + BL = $\dfrac{b}{c} BL$ + BL = $\dfrac{b+c}{c} BL$;
- От ΔABC ~ ΔPBL ⇒ $\dfrac{S_{\Delta LPB}}{S_{\Delta CAB}} = \left(\dfrac{c}{b+c}\right)^2 = \dfrac{c^2}{b^2 + 2bc + c^2}$;

IV. Медиани в триъгълник

♦ Медианите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича медицентър. Тя разделя медианата в отношение 2:1, считано от върха на триъгълника.

- Формула за медианите в триъгълник:

  (8): $4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$.
- Формули за връзка между страна и медиани:

  (9): $9a^2 = 4\left(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2\right)$.

Бележка:

Формули (8) и (9) може да се запишат и за медианите към другите страни в триъгълника.

Основни задачи:

Зад. 4: Нека медианата от върха C на ΔABC пресича AB в т. C_1, а точка M е медицентърът на ΔABC с лице S. Да се докаже, че:

а) всяка медиана разделя триъгълника на два равнолицеви триъгълника;

б) триъгълниците AMB, BMC и CMA са равнолицеви, т.е.

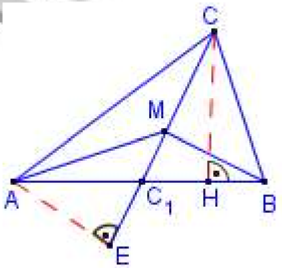
$$S_{AMB} = S_{BMC} = S_{AMC} = \frac{1}{3}S.$$

в) $S_{AC_1M} = \frac{1}{6}S$

<u>Решение:</u>

а) Нека $CH \perp AB$, тогава CH е височина, както в ΔAC_1C, така и в ΔBC_1C. Затова

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta AC_1C} &= \frac{AC_1 . CH}{2} \\ S_{\Delta BC_1C} &= \frac{BC_1 . CH}{2} \end{aligned}\right\}, \text{ но } AC_1 = BC_1 \Rightarrow S_{\Delta AC_1C} = S_{\Delta BC_1C}$$



б) Нека $AE \perp CC_1$, тогава AE е височина в ΔAMC, ΔAC_1M и ΔAC_1C.

- т.M – медицентър в $\Delta ABC \Rightarrow CM = 2MC_1$. Тогава

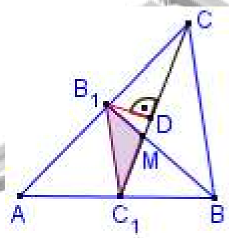
  $MC_1 = x$, $CM = 2x$, $CC_1 = 3x$. Затова $\frac{CM}{CC_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow CM = \frac{2}{3}CC_1$ и $MC_1 = \frac{1}{3}CC_1$
- От а) следва, че $S_{\Delta AC_1C} = \frac{1}{2}S$
- $S_{\Delta AMC} = \frac{CM . AE}{2} = \frac{2}{3}\frac{CC_1 . AE}{2} = \frac{2}{3}S_{\Delta AC_1C} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}S = \frac{1}{3}S$
- По подобен начин се доказва, че $S_{AMB} = S_{BMC} = \frac{1}{3}S$

в) От б) $\Rightarrow \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow MC_1 = \frac{1}{3}CC_1$

- $S_{\Delta AC_1M} = \frac{MC_1 . AE}{2} = \frac{1}{3}\frac{CC_1 . AE}{2} = \frac{2}{3}S_{\Delta AC_1C} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}S = \frac{1}{6}S$

Зад. 5: Нека точка M е медицентърът на ΔABC с лице S и CC_1 и BB_1 са медиани. Да се намери лицето на ΔC_1MB_1.

<u>Решение:</u>



- CC_1 – медиана в ΔABC и от Основна задача 3 $\Rightarrow$

  $(A): S_{\Delta C_1MB_1} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S$;
- C_1B_1 – медиана в ΔAC_1C, тогава от (A) и от Основна задача 3 $\Rightarrow (B): S_{\Delta C_1CB_1} = \frac{1}{2}S_{\Delta AC_1C} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}S$;
- т. M – медицентър в $\Delta ABC \Rightarrow C_1M = x$, $MC = 2x$;
- $$\left.\begin{aligned} S_{\Delta C_1MB_1} &= \frac{C_1M . B_1D}{2} = \frac{x.h}{2} \\ S_{\Delta MCB_1} &= \frac{MC . B_1D}{2} = \frac{2x.h}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\Delta MCB_1}}{S_{\Delta C_1MB_1}} = \frac{\frac{2x.h}{2}}{\frac{x.h}{2}} = 2 \Rightarrow$$

  $(C): S_{\Delta MCB_1} = 2S_{\Delta C_1MB_1}$
- $S_{\Delta C_1CB_1} = S_{\Delta C_1MB_1} + S_{\Delta MCB_1}$ и от (B) и (C) $\Rightarrow \frac{1}{4}S = S_{\Delta C_1MB_1} + 2S_{\Delta C_1MB_1} \Rightarrow$

  $S_{\Delta C_1MB_1} = \frac{1}{12}S$.

Зад. 6: Нека т. M, т. N и т. P са среди съответно на страните AC, BC и AB на ΔABC. Ако ΔABC е с лице S да се намери:

а) лицето на ΔMNC;

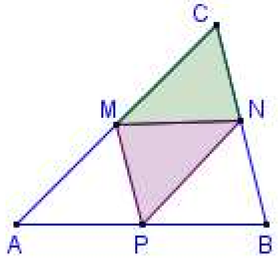
б) лицето на ΔMNP.

Решение:

а)Точки M и N са среди на AC и BC ⇒

$CM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \frac{CM}{AC} = \frac{1}{2}$

$CN = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{1}{2}$



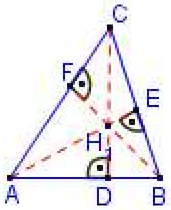
- ΔMNC ~ ΔABC (по II признак, защото: 1. ∢C – общ, 2. $\frac{CM}{AC} = \frac{CN}{BC} = \frac{1}{2}$)
- От (4) ⇒ $\frac{S_{\Delta MNC}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{CN}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta MNC} = \frac{1}{4}S$.

б) По подобен начин се доказва, че $S_{\Delta MPA} = S_{\Delta NPB} = \frac{1}{4}S$.

- $S_{\Delta MNP} = S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta MPA} + S_{\Delta NPB} + S_{\Delta MNC}) = S - \frac{3}{4}S = \frac{1}{4}S$.

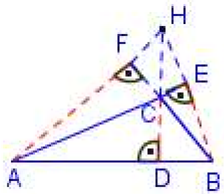
V. Височини и симетрали в триъгълник

- ♦ Височините на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която се нарича ортоцентър. На чертежа ортоцентърът е отбелязан с т. H, както на Фиг. 4 ΔABC е остроъгълен, на Фиг. 5 ΔABC е правоъгълен и на Фиг. 6 ΔABC е тъпоъгълен.



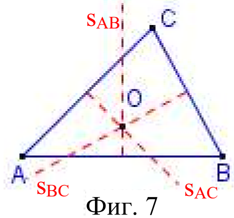
Фиг. 4

Фиг. 5

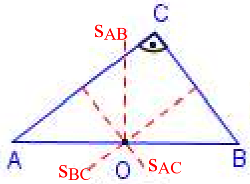


Фиг. 6

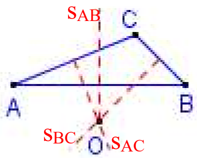
- ♦ Симетралите на всеки триъгълник се пресичат в една точка, която е център на описаната около триъгълника окръжност. На чертежите центърът на описаната окръжност е отбелязан с т. O, като на Фиг. 7 ΔABC е остроъгълен, на Фиг. 8 ΔABC е правоъгълен и на Фиг. 9 ΔABC е тъпоъгълен.



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Бележки:

1) В равностранен триъгълник медицентърът, ортоцентърът, центърът на вписаната и центърът на описаната окръжност съвпадат, т.е. те лежат върху височината.
2) В равнобедрен триъгълник медицентърът, ортоцентърът, центърът на вписаната и центърът на описаната окръжност лежат върху височината към основата, но не съвпадат.

VI. Основни типове задачи:

Зад. 7: Нека A_1, B_1, C_1 са петите на височините, спуснати от върховете A, B, C на остроъгълния ΔABC и ∢ABC = β, ∢BAC = α, ∢ACB = γ. Да се докаже, че:

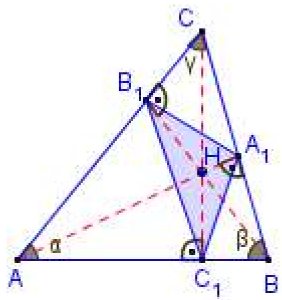
а) ако т. H е ортоцентър на ΔABC, то ∢BHC =180 – α, ∢AHB =180 – γ, ∢AHC = 180 – β;

б) ΔAB_1C_1, ΔA_1BC_1, ΔA_1B_1C, $\Delta A_1B_1C_1$ са подобни на ΔABC и за първите три триъгълника да се намери коефициента на подобие;

в) B_1C_1 = a cos α; C_1A_1 = bcos β; A_1B_1 = ccos γ;

г) височините на ΔABC са ъглополовящи на $\Delta A_1B_1C_1$.

Решение: а)



- От $\Delta ABB_1 \Rightarrow \sphericalangle ABB_1 = 90^0 - \alpha$;
- От $\Delta BHC_1 \Rightarrow \sphericalangle BHC_1 = 90^0 - \sphericalangle C_1BH = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$;
- $\sphericalangle BHC = 180^0 - \sphericalangle BHC_1 = 180^0 - \alpha$;
- По аналогичен начин доказваме, че ∢AHB=180 – γ, ∢AHC = 180 – β.

адрес: гр.София, ж.к. Люлин, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

б) $\left.\begin{array}{l} \text{от } \Delta AA_1C \Rightarrow \dfrac{CA_1}{AC} = \cos\gamma \\ \text{от } \Delta BCB_1 \Rightarrow \dfrac{CB_1}{BC} = \cos\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow (A): \dfrac{CA_1}{AC} = \dfrac{CB_1}{BC} = \cos\gamma$

- $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$ (по II признак, защото (A) е изпълнено и γ – общ ъгъл) с коефициент на подобие $\cos\gamma$ (следва от (A)).
- По подобен начин се доказва, че $\Delta B_1C_1A \sim \Delta ABC$ с коефициент на подобие $\cos\alpha$ и $\Delta A_1C_1B \sim \Delta ABC$ с коефициент на подобие $\cos\beta$.
- Доказваме, че $\Delta A_1B_1C_1$ е подобен на ΔABC: От $\Delta A_1B_1C \sim \Delta B_1C_1A \sim \Delta A_1C_1B \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$, т.е. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$

в) От $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{CA_1}{AC} = \dfrac{CB_1}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \cos\gamma \Rightarrow A_1B_1 = c.\cos\gamma$. По подобен начин се доказват и останалите равенства.

г) От $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle CA_1B_1 = \alpha$, тогава (B): $\sphericalangle AA_1B_1 = 90^0 - \sphericalangle CA_1B_1 = 90^0 - \alpha$

От $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle BA_1C_1 = \alpha$, тогава (C): $\sphericalangle AA_1C_1 = 90^0 - \sphericalangle BA_1C_1 = 90^0 - \alpha$

- От (B) и (C) $\Rightarrow \sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle AA_1C_1$, т.е. AA_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle C_1A_1B_1$.
- По подобен начин се доказва, че BB_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle C_1B_1A_1$ и CC_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle A_1C_1B_1$.

Зад. 8: В триъгълника ABC точките M и N съответно от страните AB и AC са такива, че MN || BC. Намерете:

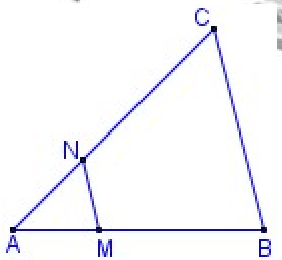
а) AN : AC и AN : NC, ако AM : AB = 3 : 7;

б) NC, ако AM = 3 cm, AB = 9 cm и AN = 2 cm;

в) AN, ако AM : AB = 2 : 3 и AC = 15 cm;

г) AN, ако AM = 2 cm, NC = 8 cm и AN = MB.

Решение:



а) От AM : AB = 3 : 7 ⇒ AM = 3x, AB = 7x.
- BM = AB – AM = 4x;
- MN || BC ⇒ от (1) – Теорема на Талес ⇒ $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{3x}{7x} = \dfrac{3}{7}$;
- От (2) – следствие на Теорема на Талес ⇒ $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4}$

б) От чертежа ⇒ CN = AC – AN. Намираме AC:
- MN || BC ⇒ от (1) – Теорема на Талес ⇒ $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow \dfrac{2}{AC} = \dfrac{3}{9} \Rightarrow AC = 6$;
- CN = AC – AN = 6 – 2 = 4;

в) От AM : AB = 2 : 3 ⇒ AM = 2x, AB = 3x.
- MN || BC ⇒ от (1) – Теорема на Талес ⇒ $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow \dfrac{AN}{15} = \dfrac{2x}{3x} \Rightarrow AN = 10$;

г) От AN = MB ⇒ AN = MB = x.
- MN || BC ⇒ от (2) – следствие на Теорема на Талес ⇒ $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AM}{MB} \Rightarrow \dfrac{x}{8} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow$

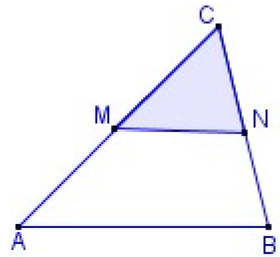
$x^2 = 16 \Rightarrow x = AN = 4$;

Зад. 9: Нека т. M и т. N са среди съответно на страните AC и BC на ΔABC. Да се намери лицето на ΔMNC, ако:

а) лицето на ΔABC е 80 cm^2;

б) лицето на ΔABC е S.

Решение:



а) M и N са среди на AC и BC ⇒ MN средна отсечка в ΔABC, т.е. AB || MN, CM = $\dfrac{1}{2}$ AC;
- ΔMNC ~ ΔABC (по I признак, защото ∢C – общ и ∢NMC = ∢BAC – като съответни ъгли на MN || AB) и от (4) ⇒
$(A): \dfrac{S_{\Delta MNC}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{MC}{AC}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$
- $\dfrac{S_{\Delta MNC}}{80} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta MNC} = 20$ cm^2.

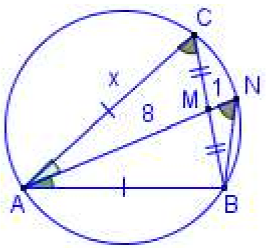
б) От (A) ⇒ $S_{\Delta MNC} = \dfrac{1}{4}$ S;

Зад. 10: Даден е равнобедрен ΔABC (AB = AC) точка M е среда на BC и AM пресича описаната окръжност в т. N. Ако AM = 8 cm и MN = 1 cm намерете бедрото на триъгълника

Решение: Нека AB = AC = x

- ∢ACB = ∢ANB (защото са вписани и имат една и съща дъга AB)
- ΔABN ~ ΔAMC (по I признак, защото ∢CAM = ∢BAN – по условие и ∢ACM = ∢ANB – по д-во) ⇒

$\frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{8} \Rightarrow x^2 = 9.8 \Rightarrow x = AC = 6\sqrt{2}\ cm$



Зад. 11: От т. A, външна за окръжност k, са построени допирателна AB и секуща AD (C е между A и D). Намерете:

а) CD, ако AB = 2 cm, AD = 4 cm;

б) AD, ако AC : CD = 4 : 5 и AB = 12 cm.

Решение:

- ∢ADB = ∢ABC (като вписан и периферен ъгъл, които имат една и съща дъга AB);
- ΔADB ~ ΔABC (по I признак, защото ∢A – общ и ∢ADB = ∢ABC – по д-во)

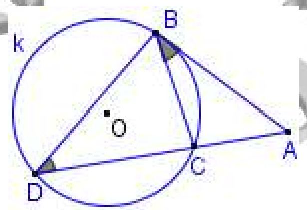
$\Rightarrow (1): \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC}$

а) Нека CD = x, тогава AC = AD – CD = 4 – x и от (1) ⇒

$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{4-x} \Rightarrow \quad x = CD = 3\ cm.$

б) От условието AC : CD = 4 : 5 ⇒ AC = 4x, CD = 5x, тогава AD = 4x + 5x = 9x и от (1) ⇒

$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{9x}{12} = \frac{12}{4x} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$, т.е. AD = 9x = 3 cm.



Зад. 12: Даден е ΔABC. Ъглополовящата на върха B пресича страната AC в точка L. Да се намери AL, LC и BL, ако:

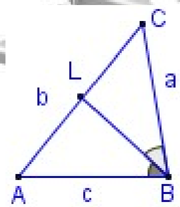
а) AB = 35 cm, AC = 36 cm, BC = 10 cm;

б) AB = c, AC = b, BC = a (Формула 7).

Решение: а) BL – ъглополовяща и от (5) ⇒

$\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{AB} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$, т.е. CL = 2x, AL = 7x;

- AL + CL = AC ⇒ 2x + 7x = 36 ⇒ x = 4;



- CL = 2x = 8 cm, AL = 7x = 28 cm;
- От (6) ⇒ BL^2 = AB.BC – AL.CL = 35.10 – 8.28 = 126 ⇒ $BL = 3\sqrt{14}$.

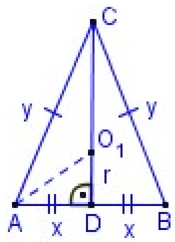
б) От (5) ⇒ $\frac{CL}{AL} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$, т.е. CL = ax, AL = cx

- AL + CL = AC ⇒ cx + ax = b ⇒ $x = \frac{b}{a+c}$;
- $CL = ax = \frac{ab}{a+c}$, $AL = cx = \frac{cb}{a+c}$;
- От (6) ⇒ BL^2 = AB.BC – AL.CL ⇒ $BL^2 = ca - \frac{acb^2}{(a+c)^2}$.

Зад. 13: В равнобедрен ΔABC (AC = BC) с периметър P = 14 радиусът на вписаната окръжност се отнася към височината от върха C , както 2 : 7. Да се намери дължината на основата AB.
(УНСС, 2009)

Решение: От даденото отношение r:h = 2:7 ⇒ r = 2z, h = 7z;

- ΔABC – равнобедрен и CD – височина ⇒ CD – медиана и ъглополовяща, т.е. AD = BD = x и за центърът на вписаната в триъгълника окръжност имаме $O_1 \in CD$, т.е. O_1D = r = 2z, а $CO_1 = CD - O_1D$ = h – r = 7z – 2z = 5z;
- O_1 – център на вписаната окръжност ⇒ AO_1 – ъглополовяща, но AO_1 е ъглополовяща и в ΔADC. От свойство на ъглополовяща (5) ⇒ $\frac{CO_1}{DO_1} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{5z}{2z} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$, т.е. y=5n, x=2n
- $P_{\Delta ABC}$ = 2x + 2y = 2(x + y) = 2(2n + 5n) ⇒ 14n = 14 ⇒ n = 1
- AB = 2x = 2.2n = 4 ⇒ AB = 4.



Зад. 14: Върху страните AB, BC на ΔABC с дадено лице S са избрани съответно точките N и M така, че AN : MB = BM : MC = 1 : 3. Точката P е пресечна точка на CN с AM така, че CP : PN = 5 : 1.

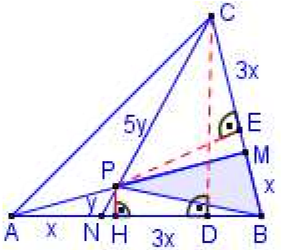
а) Да се докаже, че $S_{\Delta ANC} = \frac{1}{4}S$; $S_{\Delta NBP} = 3S_{\Delta ANP}$.

б) Да се изрази лицето на ΔBMP чрез S.

Решение:

а) От AN : MB = BM : MC = 1 : 3 ⇒ AN = BM = x, NB=MC=3x, тогава AB = 4AN = 4x.

- $S_{\Delta ABC} = S = \frac{1}{2} AB.CD = \frac{1}{2} 4AN.CD = 4.\frac{1}{2} AN.CD = 4S_{\Delta ANC} \Rightarrow S_{\Delta ANC} = \frac{1}{4}S$.
- $S_{\Delta NBP} = \frac{1}{2} BN.PH = \frac{1}{2} 3AN.PH = 3.\frac{1}{2} AN.PH = 3S_{\Delta ANP}$.



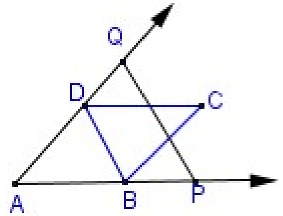
б) От CP : PN = 5 : 1 ⇒ CP = 5y, PN = y, тогава NC = 6PN = 6y. Търсеното лице го намираме от равенството $S_{\Delta BMP} = S_{\Delta NBC} - (S_{\Delta NBP} + S_{\Delta MCP})$. Последователно намираме:

- В а) доказахме, че $S_{\Delta ANC} = \frac{1}{4}S \Rightarrow S_{\Delta NBC} = \frac{3}{4}S$;
- Намираме $S_{\Delta NBP}$:
  - $\Delta NHP \sim \Delta NDC$ (по I признак, защото $\sphericalangle NHP = \sphericalangle NDC = 90^0$ и $\sphericalangle N$ – общ) ⇒
    $$\frac{PH}{CD} = \frac{NP}{NC} = \frac{y}{6y} = \frac{1}{6}$$
  - $S_{\Delta NBP} = \frac{1}{2}NB.PH$ и $S_{\Delta NBC} = \frac{1}{2}NB.DC \Rightarrow \frac{S_{\Delta NBP}}{S_{\Delta NBC}} = \frac{\frac{1}{2}NB.PH}{\frac{1}{2}NB.CD} = \frac{PH}{CD} = \frac{1}{6} \Rightarrow$
    $S_{\Delta NBP} = \frac{1}{6}S_{\Delta NBC} = \frac{1}{6}.\frac{3}{4}S = \frac{1}{8}S$.
- $S_{\Delta MCP} = \frac{1}{2}MC.PE = \frac{1}{2}3BM.PE = 3.\frac{1}{2}BM.PE = 3S_{\Delta BMP}$.
- $S_{\Delta BMP} = S_{\Delta NBC} - (S_{\Delta NBP} + S_{\Delta MCP}) = \frac{3}{4}S - \frac{1}{8}S - 3S_{\Delta BMP} \Rightarrow S_{\Delta BMP} + 3S_{\Delta BMP} = \frac{3}{4}S - \frac{1}{8}S$
  $\Rightarrow S_{\Delta BMP} = \frac{5}{32}S$.

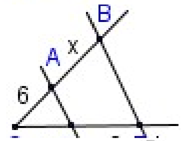
VII. Задачи за упражнение:

Тестови задачи:

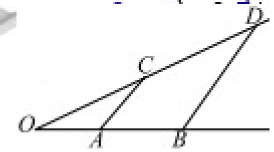
1. (ТУ, 2011): Точките A, B. C и D лежат на окръжност. Хордите AB и CD се пресичат в точка E, която лежи вътре в окръжността, като DE = 6 cm, EC = 8 cm и дължината на отсечката BE е с 8 cm по-голяма от дължината на отсечката AE. Дължината на хордата AB е:
   А) 4 cm; Б) 6 cm; В) 8 cm; Г) 12 cm; Д) 16 cm.
2. (Матура, 2010): На чертежа ABCD е успоредник и PQ || BD. Ако AB = 8 cm, BC = 6 cm и AP =12 cm, то дължината на DQ е:
   А) 1, 5 cm; Б) 2 cm;
   В) 3 cm; Г) 4 cm.



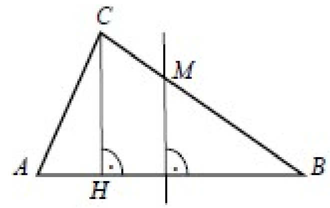
3. (Матура, 2011): На чертежа правите a и b са успоредни, като OA = 6, CD = 8, OC = AB = x. Стойността на x е:
   А) $2\sqrt{2}$; Б) $2\sqrt{3}$;
   В) 4; Г) $4\sqrt{3}$.



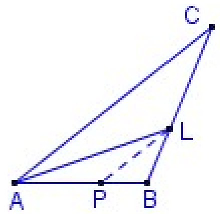
4. (Матура, 2012): На чертежа AC || BD. Ако $OA = 4\sqrt{2}$, $CD = 8\sqrt{2}$ и OC = AB , то отсечката AB е:
   А) 4; Б) $4\sqrt{2}$;
   В) 8; Г) невъзможно да се определи.



5. (ТУ, 2010): През медицентъра на ΔABC е построена права, успоредна на страната BC, която пресича страната AC в т. E. Ако AC = 18 cm, то дължината на AE е равна на:
   А) 16 cm; Б) 14 cm; В) 17 cm; Г) 18 cm; Д) 12 cm.
6. (Матура, 2012) В ΔABC симетралата на страната AB пресича страната BC в точка M така, че BM :CM = 5 : 2. Ако CH (H ∈ AB) е височина в ΔABC, намерете отношението AH:HB.
   А) 1 : 5; Б) 3 : 5;
   В) 3 : 7; Г) 2 : 7.



7. (Матура, 2010): Даден е ΔABC със страни AB = 12 и AC=15. Построена е ъглополовящата AL ($L \in BC$) и през точка L е построена права LP ($P \in AB$) и $LP \parallel AC$. Отношението $S_{\Delta LPB}:S_{\Delta ABC}$ е равно на:

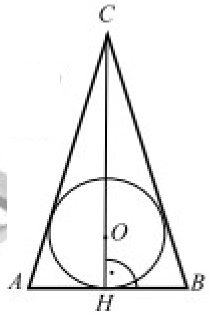


А) $\frac{4}{5}$; Б) $\frac{4}{9}$;
В) $\frac{16}{25}$; Г) $\frac{16}{81}$.

8. (ТУ, 2011): В равнобедрения ΔABC (AC= BC) отсечката AL ($L \in BC$) е ъглополовяща, LC = 2BL и периметърът на ΔABC е 15 cm. Дължината на BL в cm е:

А) 6; Б) 3; В) 2; Г) 4; Д) 5.

9. (Матура, 2012): В равнобедрен ΔABC с основа AB = 8 cm е вписана окръжност. Центърът O на окръжността дели височината CH в отношение 5 : 2. Дължината на AC е равна на:

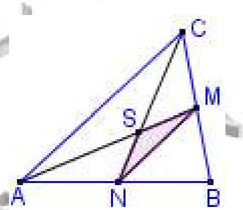


А) 6 cm; Б) 10 cm;
В) 16 cm; Г) 20 cm.

10. (Матура, 2010): Страните на триъгълник са BC = 27 cm, AC = 36 cm и AB = 21 cm. Намерете отношението, в което центърът на вписаната окръжност дели ъглополовящата CL ($\in AB$), считано от точка C.

А) 2:1; Б) 1:2; В) 4:1; Г) 3:1.

11. (Матура, 2011): За ΔABC на чертежа точка M е средата на BC, а точка N е средата на AB. Правите AM и CN се пресичат в точка S. Каква част от лицето на ΔABC е лицето на ΔMNS?

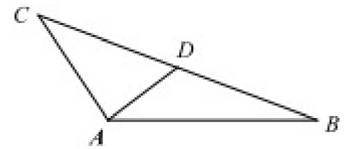


А) $\frac{1}{6}$; Б) $\frac{1}{8}$;
В) $\frac{1}{10}$; Г) $\frac{1}{12}$.

12. (Матура, 2011): Окръжността, вписана в равнобедрен триъгълник, разделя височината към основата му на две части, които са в отношение 1:3, считано от върха на триъгълника. Ако основата има дължина 12 cm, дължината на бедрото е:

А) 8 cm; Б) 10 cm; В) 12 cm; Г) 18 cm.

13. (Матура, 2012): На чертежа за ΔABC е дадено AB = 6 cm, BC = 8 cm и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB$. Дължината на отсечката BD е равна на:



А) 6 cm; Б) 4,5 cm;
В) 4 cm; Г) 3,5 cm.

Задачи за подробно решаване:

Следват 47 задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидат-студенти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидат-студентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас”.