Учебен център "СОЛЕМА"
обучение по математика, физика, български и английски език, компютър
адрес: гр.София, ж.к. Люлин, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Тригонометрични уравнения и неравенства

I. Тригонометрична окръжност

Окръжност k с център O и радиус 1.

II. Обобщен **ъгъл**

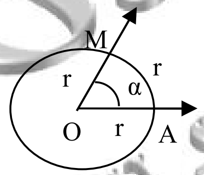
Ъгълът, който се получава при завъртането на точка M по тригонометричната окръжност, се нарича обобщен ъгъл. На фиг. 1 обобщеният ъгъл може да бъде: α; α ± 360^0; α ± 2.360^0 и т.н. Виждаме, че обобщения, ъгъл може да се получи при ротация на ъгъла: $\alpha + k.360^0$, (1)
където k = 0; ±1; ±2; …е броят на оборотите (т.е. броят на завъртанията на второто рамо на ъгъла).

Бележка:

Навсякъде в този урок числото k е произволно цяло число, за което имаме k = 0; ±1; ±2; … т.е. $k \in Z$.

III. Радиан

Всеки ъгъл може да се измерва с градусни мерки или радиани. Централен ъгъл, за който дължината на съответната му дъга е равна на радиуса на окръжността, се нарича радиан (rad). На фиг. 1 се вижда, че ∢AOM = α rad



Фиг. 1

Превръщането от едната мерна единица в другата се извършва по следния начин:

$$\frac{\alpha^0}{180}.\pi = x \text{ rad} \qquad \frac{\alpha}{\pi}180 = x^0 \qquad (2)$$

Бележка:

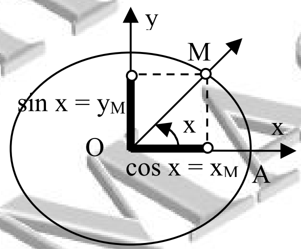
След градусната мярка се поставя знака за градус "0", а след радианната мярка не се записва означението rad

IV. Тангенсова и котангенсова ос

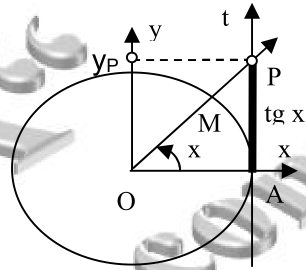
Нека да имаме обобщен ∢AOM:

- Тангенсова ос – Оста $\overrightarrow{At}$, която е допирателна до точка A (фиг. 3);
- Котангенсова ос – Оста $\overrightarrow{Bc}$, която е допирателна до точка B (фиг. 4);

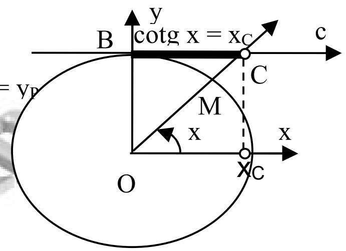
V. Тригонометрични функции и свойствата им:



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

sin x

- Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл x ординатата y_M на точка M (Фиг. 2). Графиката е синусоида (Фиг. 9)
- ДМ: ∀x;
- Функцията е периодична с период 2π т.е. sin x = sin (x ± 2π);
- Функцията е нечетна, т.е. sin (– x) = – sin x;
- Приема най-голяма стойност 1 при $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$;
- Приема най-малка стойност – 1 при $x = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$;
- Приема стойност 0 при x = k.π;
- Расте от – 1 до 1 във всеки интервал $\left[-\frac{\pi}{2} + k.2\pi; \frac{\pi}{2} + k.2\pi\right]$;
- Намалява от + 1 до – 1във всеки интервал $\left[\frac{\pi}{2} + k.2\pi; \frac{3\pi}{2} + k.2\pi\right]$;

cos x

- Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл x абсцисата x_M на точка M (Фиг. 2). От равенството $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ следва, че графиката на cos x се получава от синусоидата изместена (транслирана) наляво по оста x, на разстояние $\frac{\pi}{2}$ (Фиг. 11);
- ДМ: $\forall x$;
- Функцията е периодична с период 2π т.е. cos x = cos (x ± 2π);
- Функцията е четна, т.е. cos (– x) = cos x;
- Приема най-голяма стойност 1 при x = kπ;
- Приема най-малка стойност – 1 при x = π + k.2π;
- Приема стойност 0 при $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$;
- Расте от – 1 до 1 във всеки интервал [-π+k.2π; k.2π];
- Намалява от + 1 до – 1във всеки интервал [k.2π; π+ k.2π];

tg x

- Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл x ординатата y_P на точка P, която е пресечна точка между тангенсова ос $At^{\rightarrow}$ и второто рамо на обобщения ъгъл x (Фиг. 3). На координатната система графиката е показана на Фиг. 13;
- ДМ: $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- Функцията е периодична с период π т.е. tg x = tg (x ± kπ);
- Функцията е нечетна, т.е. tg (– x) = – tg x. Затова графиката и в интервала $\left(-\frac{\pi}{2};0\right]$ е симетрична на графиката и в интервала $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ относно началото на координатната система;
- Няма най-голяма и най-малка стойност;
- Приема стойност 0 при x = kπ;
- Расте от – ∞ до +∞ във всеки интервал $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$;

Бележка:

Функцията y = tg x е растяща в интервала $\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$, но не е растяща в интервал, съдържащ точките в които функцията не е дефинирана, т.е.точки от вида $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$. Например: функцията y = tg x не е растяща в интервала (0; π).

cotg x

- Това е функцията, която съпоставя на обобщен ъгъл x абсцисата x_C на точка C, която е пресечна точка между котангенсова ос $Bc^{\rightarrow}$ и второто рамо на обобщения ъгъл x (Фиг. 4). На координатната система графиката и е показана на Фиг. 15;
- ДМ: $\forall x \neq k\pi$;
- Функцията е периодична с период π т.е. cotg x = cotg (x ± kπ);
- Функцията е нечетна, т.е. cotg (– x) = – cotg x;
- Няма най-голяма и най-малка стойност;
- Приема стойност 0 при $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$;
- Намалява от +∞ до – ∞ във всеки интервал (kπ; π+kπ);

Бележка:

Функцията y = cotg x е намаляваща в интервала (kπ; π+kπ), но не е намаляваща в интервал, съдържащ точки, в които функцията не е дефинирана, т.е.точки от вида x = kπ. Например: функцията y = cotg x не е намаляваща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

VIII. Тригонометрични уравнения

Уравнения, при които неизвестното се съдържа само под знака на тригонометричната функция. Например: уравнението cos x + x = 1, не е тригонометрично.

Основните тригонометрични уравнения и техните решения са представени в следната таблица:

Таблица № 3

У-ние:	$1<a<-1$ т.е. $\lvert a\rvert>1$	a= – 1	a= 0	a= 1	$-1<a<1$ т.е. $\lvert a\rvert<1$
sin x =a	н.р.	$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	x=kπ	$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$	(A): x=α + 2kπ (B): x=π – α + 2kπ
cos x =a	н.р.	x=π+2kπ	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	x=2kπ	(A): x = α + 2kπ (B): x = – α + 2kπ
tg x =a	x=α+kπ	$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$	x=kπ	$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$	x=α+kπ
cotg x =a	x=α+kπ	$x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=\frac{\pi}{4}+k\pi$	x=α+kπ

Бележки:

1. Решенията (A) и (B) не са броя на решенията, а броя на групите решения. Тригонометричните уравнения имат безброй много решения (защото графиката на тригонометричната функция пресича много пъти права успоредна на абсцисната ос.
2. Уравненията tg x =a и cotg x =a имат решения за ∀a, а уравненията sin x =a и cos x =a имат решения за $a\in[-1;1]$.

Начини за решаване на тригонометрични уравнения:

- Основни тригонометрични уравнения – Решават се по таблица №3. Дадено уравнение може да се преобразува до основно чрез използването на Тригонометрични формули;

Зад. 1: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

Решение:

I начин:

От таблица № 1 (виж Таблици) определяме стойността на cos, а основното уравнение решаваме от таблица №3:

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3},\alpha=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

II начин:

От таблица № 1 (виж Таблици) определяме стойността на α, а основното уравнение решаваме от таблица №3:

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2};\alpha=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2n}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

Бележка:

Ако в множеството ъгли от вида α+kβ параметъра k се замени с k±m, където m е цяло число, множеството не се променя.
Например: в множеството $\frac{\pi}{6}+k\pi$ нека да заменим k с k+1, то полученото множество $\frac{\pi}{6}+(k+1)\pi=\frac{7\pi}{6}+k\pi$ не се променя.

Зад. 2: $\sin x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ (1993; ВВОУ)

Решение: За дясната част използваме формула (65) от Тригонометрични формули и получаваме основно уравнение, чието решение определяме от Таблица №3:

$ДМ: x\neq\frac{\pi}{2}+kn$

$$\sin x=\cos 2x\overset{(табл.№2)}{\Leftrightarrow}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 2x\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi\\2x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(A)\to x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\\(B)\to x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{array}\right.$$

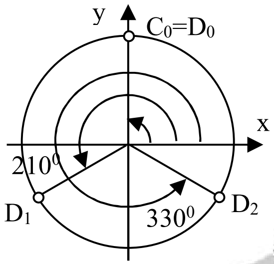
Групите ъгли (A) и (B) не са получени от едно и също тригонометрично уравнение, затова трябва да проверим има ли ъгли от едната група, които се съдържат в другата група, а така също трябва да отчетем и ДМ.

адрес: гр.София, ж.к. Люлин, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

Засичането ще разгледаме в общ случай. Нека да имаме следните групи ъгли (за означаване на обобщения ъгъл сме използвали различен параметър):

$(C) \to x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $(D) \to x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} l\pi$; $(E) \to x = \frac{1}{4} p\pi$; $(F) \to x = \frac{1}{3} q\pi$.

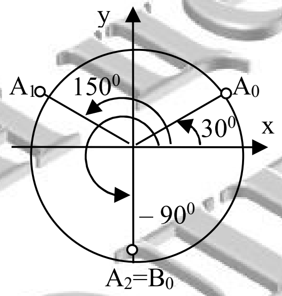
Разглеждаме групите ъгли (C) и (D) като ги приравним: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2l\pi}{3} \Big| .\frac{6}{\pi} \Leftrightarrow 3 + 12k = 3 + 4l \Leftrightarrow l = 4k$, т.е. ъглите от групата (C) се съдържат в групата (D), защото l се получава като умножим k с 4. Затова ъглите от групата (C) са дублиращи и трябва да отпаднат. Този извод може да се направи, и ако групите ъгли (C) и (D) се нанесат на тригонометричната окръжност по следния начин: Задаваме стойности на k и l от 0 до тогава докато точките започват да се повтарят (фиг.5). Виждаме, че ъглите C_0 и D_0 съвпадат. Затова можем да кажем, че ъглите от групата C са дублиращи.



Фиг.5

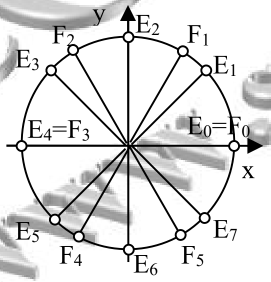
Разглеждаме групите ъгли (A) и (B) като ги приравним: $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi \Big| .\frac{6}{\pi} \Leftrightarrow 1 + 4k = -3 + 12l \Leftrightarrow k = 3l - 1$

Като отчетем Бележката от зад.1 следва, че ъглите от групата (B) се съдържат в групата (A), т.е. те са дублиращи и трябва да отпаднат. Същият извод можем да направим, и ако ги нанесем върху тригонометричната окръжност (фиг. 6)



Фиг.6

Разглеждаме групите ъгли (E) и (F) като ги приравним: $\frac{p\pi}{4} = \frac{q\pi}{3} \Big| .\frac{12}{\pi} \Leftrightarrow 3p = 4q \Leftrightarrow p = \frac{4q}{3}$, т.е. излишните ъгли са от групата (F) и то не всички, а тези които са кратни на 3. Определянето на излишните ъгли (и тези които ще останат) се прави от тригонометричната окръжност (фиг.7). Двете групи съвпадат при ъгли 0 и π. Затова едната група решения ще бъдат групата E, т.е. $x = k\frac{\pi}{4}$. Останалите отговори: $-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$ групираме по следния начин: Отговорите $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ (както се вижда от фиг.7) се различават с 180^0. Затова можем да ги запишем по следния начин: $\frac{\pi}{3} + k\pi$.. По същия начин отговорите $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ могат да бъдат записани като $-\frac{\pi}{3} + k\pi$. Тези два отговора записваме $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. В крайна сметка след засичането на групите (E) и (F) получаваме, че решенията са: $\left\{ \begin{aligned} x &= k\frac{\pi}{4} \\ x &= \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{aligned} \right.$



Фиг.7

Нека сега да разгледаме групите ъгли (C) и (F) като ги приравним: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{q\pi}{3} \Big| .\frac{6}{\pi} \Leftrightarrow 3 + 12k = 2q \Leftrightarrow q = 6k + \frac{3}{2}$

От тук се вижда, че групите ъгли (C) и (F) се различават с дробно число. В такъв случай дублиращи ъгли няма и двете групи ъгли са решения.

Бележка:

Да повторим, че групите ъгли не се засичат, когато са получени от едно и също основно тригонометрично уравнение. В случай, когато броят на групите са много и могат да бъдат записани по общ начин (както при фиг. 7), тогава те също се групират (без обаче да изключваме част от тях).

Нека сега се върнем на групите (A) и (B), които са решения на дадената задача 2. От фиг. 6 видяхме, че групите решения (B) са дублиращи. Тогава решенията на уравнението остават да бъдат групата (A). Като отчетем Д.М. виждаме, че ъглите от групата $(A_2) \to -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ не принадлежат на Д.М.(защото тогава tg не е дефиниран) и трябва да се изключат от решенията. И, както виждаме от фиг. 6, окончателните решения са групите ъгли: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (отговарящи на точки (A_0)) и $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (отговарящи на точки (A_1)).

- Чрез разлагане на множители – При този метод всички едночлени се прехвърлят от едната страна на равенството и с помощта на формулите от Тригонометрични формули, се стремим да достигнем до равенството: $f(x)\,g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ или $g(x) = 0$ (3)
  При този начин за решаване отговорите винаги се засичат по описания по-горе начин.

Зад. 3: $3\cos^2 x + 2\cos^3 x = 2\cos x$

<u>Решение:</u> $3\cos^2 x + 2\cos^3 x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x + 3\cos x - 2\right) = 0$. Прилагайки (3), това уравнение се разделя на следните две:

1) $\cos x = 0 \Leftrightarrow (A) \to x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

2) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$. Полагаме: $\cos x = y$, ДМ$_y$: $y \in [-1; 1]$. Уравнението добива вида: $2y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 2 \notin$ ДМ$_y$ и $y_2 = \dfrac{1}{2}$. От полагането получаваме

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos = \cos\frac{\pi}{3};\ \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (B) \to \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Групите ъгли (А) и (В) са решения на уравнението.

- ♦ Уравнения от вида: $a.\sin Ax + b.\cos Bx = c$, (4)

където $a^2 + b^2 \neq 0$

- ○ В случаите, когато $a = b = 1$, а $c = 0$, се решават като преобразуваме едната тригонометрична функция в другата (от таблица №2) и приложим <u>Тригонометрични формули</u> (57) до (60).

Зад. 4: $\cos 2x + \sin x = 0$

<u>Решение:</u> От Таблица №2 преобразуваме sinx в cos и след това използваме формула (59):

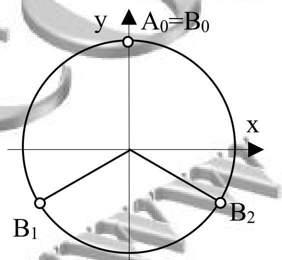
$$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{2x - x + \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{2x + x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \Big| .\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{2x+\pi}{4}\cos\frac{6x-\pi}{4} = 0$$

Прилагайки (3), това уравнение се разделя на следните две:

1) $\cos\dfrac{2x+\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (A) \to x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

2) $\cos\dfrac{6x-\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6x-\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (B) \to x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}k\pi$

Групите ъгли (А) се съдържат в групата ъгли (В), защото: $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}l\pi \Big| .\dfrac{6}{\pi} \Leftrightarrow 3 + 12k = 3 + 4l \Leftrightarrow l = 3k$, т.е. ъглите от групата (А) са дублиращи (този извод можем да го направим и от фиг.8). Затова решенията на нашето уравнения са само групата ъгли $(B) \to x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}k\pi$



Фиг.8

<u>Следващите случаи са когато A = B</u>

- ○ Когато $a = b$, а $c \neq 0$, тогава повдигаме (2) на квадрат и като приложим <u>Тригонометрични формули</u> (1) и (33) получаваме основно тригонометрично уравнение $\sin 2x = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}$

Бележка:

Всяко повдигане на квадрат на тригонометрично уравнение довежда до появата на "чужди корени". Те се отстраняват чрез непосредствена проверка.

Зад. 5: $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Решение:</u> Повдигаме на квадрат двете страни на уравнението:

$$\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 + 2\sin x\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = -\frac{1}{2} \overset{(33)}{\Leftrightarrow} \sin 2x = -\frac{1}{2};$$

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow (A) \to x = \frac{7\pi}{12} + k\pi;\quad (B) \to x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

Непосредствено проверяваме за появата на "чужди" корени по следния начин: Групите ъгли (А) са $\dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{19\pi}{12}$. Заместваме в даденото уравнение:

$\cos\dfrac{7\pi}{12} + \sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{12}$ *е решение*; $\cos\dfrac{19\pi}{12} + \sin\dfrac{19\pi}{12} \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{19\pi}{12}$ не е решение, т.е. той е "чужд" корен и след отстраняването му групата ъгли (А) има вида $(A) \to x = \dfrac{7\pi}{12} + 2k\pi$. Тази група е решение на даденото уравнение.

Групите ъгли (В) са $-\dfrac{\pi}{12}; -\dfrac{11\pi}{12}$. Заместваме в даденото уравнение:

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{12}$ *е решение*; $\cos\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right) + \sin\left(-\dfrac{11\pi}{12}\right) \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{11\pi}{12}$ не е решение, т.е. той е "чужд" корен и след отстраняването му групата ъгли (В) има вида $(B) \to x = -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$. Тази група е решение на даденото уравнение.

Бележки:

1. Задачата може да бъде решена и като се умножат двете страни на даденото уравнение с подходящо число и се приложи Тригонометрични формули (27). Подобен начин за решаване ще покажем в Зад. 7.
2. Задачата може да бъде решена и като използваме формула (76), за да достигнем до основното уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Използване на универсалната субституция (виж Тригонометрични формули (9) и (12)). В такъв случай уравнение (2) се преобразува в квадратно спрямо $tg\frac{x}{2}$.

Бележка:

Знаем, че тангенса не е дефиниран за $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, затова в нашия случай след решаването на квадратното уравнение трябва да изключим ъглите $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$

Зад. 6: 2sinx + cosx = – 1

Решение: Като използваме универсалната субституция от Тригонометрични формули (9) и (12) получаваме уравнението $2\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=-1$. ДМ на това уравнение е: $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\pi+2k\pi$ и след полагането $tg\frac{x}{2}=y$ получаваме: $2\frac{2y}{1+y^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}=-1 \Leftrightarrow 4y+1-y^2=-1-y^2 \Leftrightarrow 4y=-2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$. Тогава от полагането получаваме $tg\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$. От таблица № 2 виждаме, че нямаме изчислен ъгъл, при който тангенса да бъде равен на $-\frac{1}{2}$, но такъв ъгъл съществува. Затова този ъгъл означаваме с α. От таблица №3 определяме, че решенията на уравнението са $\frac{x}{2}=\alpha+k\pi \Leftrightarrow x=2\alpha+2k\pi$. В тези решения не се включват групите ъгли π+2kπ, но трябва непосредствено да проверим дали тези групи ъгли са решения на даденото уравнение.

От $x=\pi+2k\pi \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-1\end{array}\right.$ и заместваме в даденото уравнение: 2.0 – 1 = – 1 ⇔ – 1 = – 1, т.е. групата ъгли x = π+2kπ са решения на даденото уравнение и затова ги прибавяме към крайните решения. Окончателните решения са: x= π + 2kπ, x= 2α+2kπ. Ъгълът α определяме от таблица (или калкулатор) и има приблизителна стойност 27^0.

- Чрез въвеждане на спомагателен ъгъл – В някои случаи лявата страна на уравнението (4) е полезно да се замени с израза sin(x±φ).

Преобразуването става като разделим двете страни на уравнение (4) с $\sqrt{a^2+b^2}$ и получаваме: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin Ax+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos Ax=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Въвеждаме ∢φ с равенствата: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$ (такива полагания могат да се направят, защото $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$). Така за горното уравнение получаваме: $\cos\varphi\sin Ax+\sin\varphi\cos Ax=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Прилагаме Тригонометрични формули (27) и получаваме исканото основно тригонометрично уравнение $\sin(Ax+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Това уравнение (или уравнение (4)) има решение, ако $|c|\leq\sqrt{a^2+b^2}$. (5)

Зад. 7: $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=-\sqrt{3}$

Решение: Сравнявайки това уравнение с уравнение (4) стигаме до извода, че A = 2, a = 1, $b=-\sqrt{3}$ и $c=-\sqrt{3}$. Тогава $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ т.е. делим даденото уравнение с 2 и получаваме:

$$\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 2x-\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \overset{(27)}{\Leftrightarrow} \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha=\frac{4\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\pi+k\pi\end{array}\right.$$

- От тъждеството $(a.\sin Ax + b.\cos Ax)^2 + (b.\sin Ax - a.\cos Ax)^2 = a^2 + b^2$ намираме $(b.\sin Ax - a.\cos Ax)^2 = a^2 + b^2 - c^2$. Тогава от системата

$$\begin{cases} a\sin Ax + b\cos Ax = c \\ b\sin Ax - a\cos Ax = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2} \end{cases}$$

получаваме основните тригонометрични уравнения:

$$\sin Ax = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \text{ и } \cos Ax = \frac{bc \mp a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2} \qquad (6)$$

♦ Хомогенни тригонометрични уравнения – Те са от вида:

$$a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1}x.\cos x + \ldots + a_{n-1}\sin x.\cos^{n-1}x + a_n\cos^n x = 0 \qquad (7)$$

Хомогенните уравнения нямат решение при $\cos x = 0$, защото тогава от горното уравнение следва, че и $\sin x = 0$. Обаче от Тригонометрични формули (1) знаем, че не съществува x, за което двете функции едновременно да са 0. Затова уравнение (7) можем да го разделим на $\sin^n x$ или $\cos^n x$. Тогава хомогенното уравнение се превръща в: $a_0 tg^n x + a_1 tg^{n-1}x + \ldots + a_{n-1}tgx + a_n = 0$. Сега полагаме $tgx = y$ и уравнението се превръща в квадратно алгебрично, което решаваме.

Зад. 8: $\sin^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ (ПУ, 1996)

Решение: Допускаме, че $\cos x = 0$, от Тригонометрични формули (1) получаваме $\sin^2 x = 1$. Като заместим в даденото уравнение, получаваме 1 = 0 т.е. при това допускане уравнението не се удовлетворява. Затова делим на $\cos^2 x \neq 0$ и получаваме:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow tg^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right)tgx + \sqrt{3} = 0; \text{Полагаме}: tgx = y; ДМ: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)y + \sqrt{3} = 0; D = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \to \sqrt{D} = \sqrt{3} - 1$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}; y_2 = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{2} = 1$$

От полагането имаме следните случаи

1) $tgx = \sqrt{3}; \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (A) \to x = \frac{\pi}{3} + k\pi \in ДМ$.

2) $tgx = 1; \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (B) \to x = \frac{\pi}{4} + k\pi \in ДМ$.

Окончателните отговори са групата ъгли (A) и (B).

Някои уравнения не са от вида (7),но могат да се преобразуват с помощта на Тригонометрични формули. Например: Уравнението

$$a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x + d = 0, \text{ където } a + d \neq 0 \qquad (8)$$

се свежда до квадратно за tgx, когато d представим като $1.d$ и приложим Тригонометрични формули (1). Друг начин за преобразуване на тригонометрично уравнение в хомогенно е използването на подходящи Тригонометрични формули:

Бележка:

Уравнение (8) може да се преобразува до квадратно за $tg\,x$ с помощта на Тригонометрични формули (18) и (20) или до квадратно спрямо четвърта степен за $tg\frac{x}{2}$ с универсалната субституция (9) и (12). В случаите, когато формулите (18) и (20) свеждат уравнението до рационално за $tg\,x$ (тогава наред с тях се използват и формулите (8) и (11)), тяхното използване трябва да се предпочита пред това на формулите (9) и (12).

Зад. 9: $3\cos^3 x - \sin^2 x\cos x = \sin x.(\sin^2 x + \cos^2 x)$

Решение: Разкриваме скобите и прехвърляме всички едночлени отляво: $3\cos^3 x - \sin x.\cos^2 x - \sin^2 x.\cos x - \sin^3 x = 0$. Това уравнение е хомогенно, затова допускаме, че $\cos x = 0$, от Тригонометрични формули (1) получаваме $\sin^2 x = 1$. Като заместим в даденото уравнение, получаваме – 1 = 0, т.е. при това допускане уравнението не се удовлетворява. Затова делим на $\cos^3 x \neq 0$, и като заместим $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ получаваме: $tg^3 x + tg^2 x + tgx - 3 = 0$. $ДМ: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Полагаме: $tgx = y$ и получаваме $y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \Leftrightarrow y^3 - 1 + y^2 - 1 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 - y + 1) + (y-1)(y+1) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 1 + y + 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + 2y + 3) = 0$. Разглеждаме следните два случая:

1) $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow (A) \to x = \frac{\pi}{4} + k\pi \in ДМ$.

2) $y^2 + 2y + 3 = 0; D = 1 - 3 < 0 \Rightarrow Н.Р.$

Окончателните решения на даденото уравнение са групите (A).

Бележка:

Полученото в горната задача уравнение от трета степен $y^3 + y^2 + y - 3 = 0$ може да се реши с правилото на Хорнер.

♦ Уравнения за които използваме, че неравенствата $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$, са верни за всяко x.

Зад. 9: $\sin x + \sin 9x = 2$

Решение: За да е в сила горното уравнение, трябва да е изпълнена системата:

$$\left|\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin 9x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 9x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(A) \to x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ (B) \to x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9} l\pi\end{array}\right.$$

. Засичаме отговорите и решение на дадената задача ще бъдат само дублиращите групи ъгли:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{18} + \frac{2l\pi}{9}\Big| . \frac{18}{\pi} \Leftrightarrow 9 + 36k = 1 + 4l \Leftrightarrow l = 2 + 9k$$

, т.е ъглите от групата (А) се съдържат в групата (В) и те са дублиращи. Затова окончателното решение на даденото уравнение са $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Зад. 10: cosx.cos 7x = 1

Решение: Разглеждаме следните два случая::

$$1)\left|\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos 7x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x = 2k\pi \\ 7x = 2l\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(A) \to x = 2k\pi \\ (B) \to x = \frac{2}{7} l\pi\end{array}\right. ; 2k\pi = \frac{2l\pi}{7} \Leftrightarrow l = 7k$$

т.е. ъглите (А) са дублиращи

Общото решение в този случай е $x = 2k\pi$

$$2)\left|\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos 7x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x = \pi + 2k\pi \\ 7x = \pi + 2l\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(A) \to x = \pi + 2k\pi \\ (B) \to x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7} l\pi\end{array}\right. ; \pi + 2k\pi = \frac{\pi}{7} + \frac{2l\pi}{7} \Leftrightarrow l = 3 + 7k$$

т.е. ъглите от групата (А) се съдържат в ъглите от групата (В) и те са дублиращи. Общото решение в този случай е $x = \pi + 2k\pi$

Нанасяйки решенията (1) и (2) на тригонометричната окръжност, виждаме, че се различават с 180^0. Затова можем да ги обединим (не да ги засечем) в група ъгли $x = k\pi$, което е и решение на дадената задача.

- ♦ Уравнения, в които участват само изразите sin x + cos x и sinx.cosx или sin x – cos x и sinx.cosx.

За sin x + cos x (или sin x – cos x) използваме Тригонометрични формули (76) и правим полагането $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (или $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. От тук се вижда, че $ДМ_y : y \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ (защото $-1 \le \sin x \le 1$). Израза sinx.cosx получаваме като повдигнем полагането на квадрат, т.е.

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x = y^2 \Leftrightarrow \sin x.\cos x = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

Зад. 11: sin x + cos x =sinx cosx – 1

Решение: Полагаме sin x + cos x = y. Повдигаме двете страни на квадрат и след преобразуване получаваме $\sin x.\cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$. От Тр. Ф. (76) полагането се записва във вида $y = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$; $ДМ_y : y \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$, и даденото уравнение добива вида $y = \frac{y^2 - 1}{2} - 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$; $y_1 = 3 \notin ДМ_y$, $y_2 = -1 \in ДМ_y$ От полагането получаваме $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\alpha = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow (A) \to x = \pi + 2k\pi; \quad x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$(B) \to x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Групите ъгли (А) и (В) са окончателните решения на даденото уравнение.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 12: $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}\sin x.\cos x}$

Решение: Повдигаме на квадрат двете страни на уравнението:

$\sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2\sin^2 x.\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x) = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x(1 + 2\sin x.\cos x) = 1 | .2 \Leftrightarrow (2\sin x\cos x)^2(1 + 2\sin x\cos x) = 2 \Leftrightarrow \sin^2 2x(1 + \sin 2x) = 2$. Полагаме $\sin 2x = y$, $ДМ_y$: $y \in [-1; 1]$ и получаваме $y^2(1 + y) = 2 \Leftrightarrow y^3 + y^2 - 2 = 0$. Това уравнение от трета степен решаваме с помощта на правилото на Хорнер. Делителите на свободния член са ± 1; ± 2. По правилото на Хорнер намираме кой от тях може да бъде решение на даденото уравнение

	1	1	0	– 2
1	1	2	2	0

Щом r = 0 числото x = 1 е точен корен. Следващите делители не ги проверяваме, а записваме дадения многочлен като произведение от двучлен и квадратна функция: $(y - 1)(y + 2y + 2) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ или $y^2 + 2y + 2 = 0$, $D = 1 - 2 < 0 \Rightarrow$ Н.Р. т.е. решението е само $y = 1$. От полагането получаваме

$\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Повдигането на квадрат довежда по появата на "чужди корени", затова ще направим проверка. От тригонометричната окръжност виждаме, че получената група ъгли може да разделим на две групи: $(A) \to x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ и $(B) \to x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.. Непосредствено се проверява, че само групата (A) удовлетворява даденото уравнение (защото за група (B) от таблица №2 се вижда, че $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Замествайки в даденото уравнение, получаваме: $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, което очевидно не е вярно, т.е. група (B) не са решения на даденото уравнение). Окончателните решения на даденото уравнения са само група $(A) \to x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Зад. 13: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

Решение: За понижаване на степента използваме Тригонометрични формули (19) и получаваме:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \frac{1+\cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2\cos^2 2x + 1 + \cos 6x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 6x) + 2\cos^2 2x = 0 \overset{(59)}{\Leftrightarrow} 2\cos 4x.\cos 2x + 2\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\cos 4x + \cos 2x) = 0$$

$$1) \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (A) \to x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi$$

$$2) \cos 4x + \cos 2x = 0 \overset{(59)}{\Leftrightarrow} 2\cos 3x.\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow (B) \to x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}k\pi \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow (C) \to x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Като приравним групите ъгли (C) и (B) виждаме, че (C) е дублираща група и тя отпада като решения. Окончателните решения са: $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{3}$.

Бележка:

Когато тригонометричните функции участват в уравнението чрез четни степени, полезно е да се използват Тригонометрични формули за понижаване на степените (17) и (19).

Зад. 18: При кои стойности на реалния параметър a, уравнението $(1 - a)\cos 2x + 2(1 - 2a)\sin x + a + 3 = 0$ има решение.

Решение:. Използваме Тригонометрични формули (34) :

$$(1-a)(1-2\sin^2 x) + 2(1-2a)\sin x + a + 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - a + 2a\sin^2 x + 2(1-2a)\sin x + a + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a-1)\sin^2 x + 2(1-2a)\sin x + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-1)\sin^2 x + (1-2a)\sin x + 2 = 0$$

Разглеждаме два случая:

1) При $a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$, горното уравнение се превръща линейното уравнение $\sin x = 2$, което няма решение т.е. $a = 1$ не е решение на даденото уравнение;

2) При $a - 1 \neq 0$ в горното уравнение полагаме $\sin x = y$:

$$(a-1)y^2 + (1-2a)y + 2 = 0; D = (1-2a)^2 - 8(a-1) = 1 - 4a + 4a^2 - 8a + 8 = 9 - 12a + 4a^2 = (2a-3)^2$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{(2a-3)^2} = 2a - 3; y_1 = \frac{2a-1-2a+3}{2(a-1)} = \frac{2}{2(a-1)} \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{a-1}; y_2 = \frac{2a-1+2a-3}{2(a-1)} \Leftrightarrow y_2 = 2$$

2.а) $\sin x = 2$. Това уравнение няма решение;

2.б) $\sin x = \frac{1}{a-1}$. Това уравнение има решение, когато е изпълнено:

$$\begin{cases} \frac{1}{a-1} \geq -1 \\ \frac{1}{a-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a-1} + 1 \geq 0 \\ \frac{1}{a-1} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a-1} \geq 0 \\ \frac{2-a}{a-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;0] \cup (1;+\infty) \\ a \in (-\infty;1) \cup [2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$$

От 1) и 2) следва, че даденото уравнение има решение при $a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

VIII. Тригонометрични неравенства

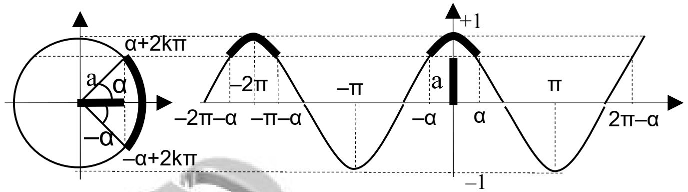
Решаването на тригонометрични неравенства обикновено се свежда до решаване на основни тригонометрични неравенства. Те са представени в таблицата:

Таблица № 4

Неравенство:	a< –1	a= –1	-1<a<1 т.е. |a|<1	a= 1	a>1
sin x > a $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\forall x$	$\forall x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\alpha+2k\pi<x<\pi-\alpha+2k\pi$ (Фиг. 9)	н.р.	н.р.
sin x<a $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	н.р.	н.р.	$-\pi-\alpha+2k\pi<x<\alpha+2k\pi$ (Фиг. 10)	$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\forall x$
cos x>a $\alpha \in [0;\pi]$	$\forall x$	$\forall x \neq \pi+2k\pi$	$-\alpha+2k\pi<x<\alpha+2k\pi$ (Фиг. 11)	н.р.	н.р.

адрес: гр.София, ж.к. Люлин, бл. 348 ☎: 0884 66 89 54 вечер, г-н Станев; Web страница: solemabg.com ; E-mail: solema@gbg.bg

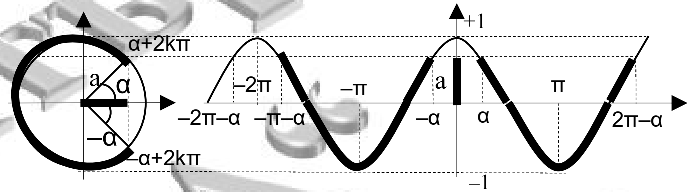
cos x<a $\alpha\in[0;\pi]$	н.р.	н.р.	$\alpha+2k\pi<x<2\pi-\alpha+2k\pi$ (Фиг. 12)	$\forall x\neq 2k\pi$	$\forall x$



Фиг. 11

Бележка:

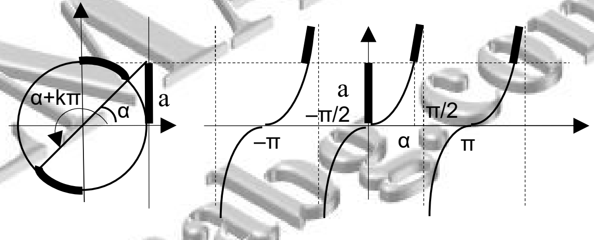
Ако имаме нестрого неравенство (например: sin x ≥ a) и a = 1 (или a = – 1), то след като неравенствата sin x > a (или cos x>a) нямат решения, то остава да търсим решение само за sin x = a = 1.



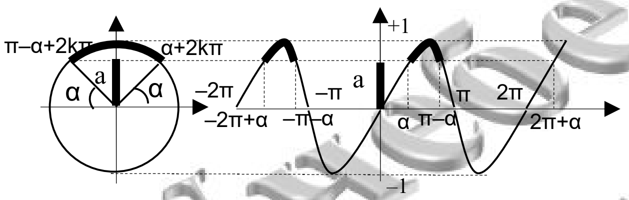
Фиг. 12

Таблица № 5

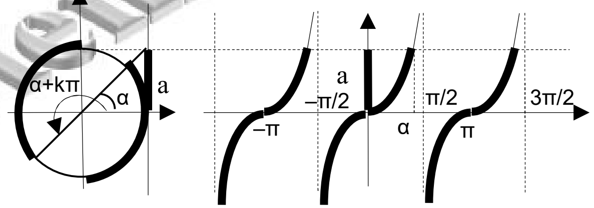
Неравенство:	$-\infty<a<+\infty$	Неравенство	$-\infty<a<+\infty$
tg x > a $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$\alpha+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ (Фиг. 13)	tg x < a $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\alpha+k\pi$ (Фиг. 14)
cotg x > a $\alpha\in(0;\pi)$	$k\pi<x<\alpha+k\pi$ (Фиг. 15)	cotg x < a $\alpha\in(0;\pi)$	$\alpha+k\pi<x<\pi+k\pi$ (Фиг. 16)



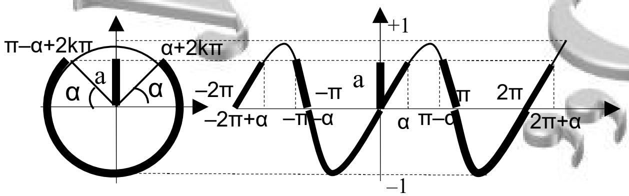
Фиг. 13



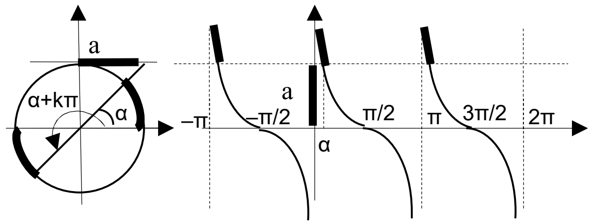
Фиг. 9



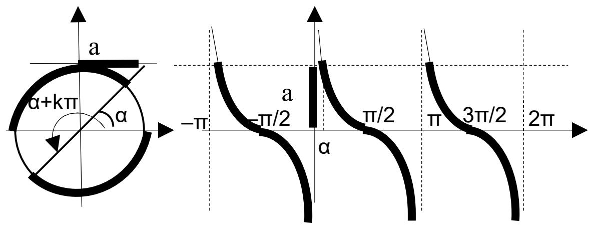
Фиг. 14



Фиг. 10



Фиг. 15



Фиг. 16

Зад. 20: sin x < cos x

Решение:. Преобразуваме до основно тригонометрично неравенство:

$$\sin x-\cos x<0\Big|.\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos x<0\overset{(27)}{\Leftrightarrow}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0;\alpha=0$$

$$-\pi-0+2k\pi<x-\frac{\pi}{4}<0+2k\pi\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}>-\pi+2k\pi\\ x-\frac{\pi}{4}<2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

Зад. 21: $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1>0$

Решение:. От таблица №2 имаме $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ и неравенството има вида:

$$2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1>0;\textit{Полагаме}:\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=y;\ ДМ_y: y\in[-1;1]\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-3y+1>0\Leftrightarrow y\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$$

$$1)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2};\alpha=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}+2k\pi<x+\frac{\pi}{4}<2\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{12}+2k\pi<x<\frac{17\pi}{12}+2k\pi$$

$$2)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>1;x\in\varnothing$$

От 1) и 2) следва, че решенията са $\frac{\pi}{12}+2k\pi<x<\frac{17\pi}{12}+2k\pi$.

IX. Тригонометрични преобразования

Зад. 23: Намерете tg 75⁰.

Решение:. Аргумента на дадената тригонометрична функция представяме така, че да може да използваме Таблица за стойностите на тригонометричните функции:

$$tg\,75^0=tg\,(30^0+45^0)\overset{ТФ.(4.5)}{=}\frac{tg30^0+tg45^0}{1-tg30^0.tg45^0}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}.\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{9-3}=$$

$$=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{6}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

Зад. 24: Намерете стойността на всички тригонометрични функции, ако $tg\alpha=2\frac{2}{5}$ и $\alpha\in(0^0;90^0)$.

Решение:.Синус и косинус намираме от системата $\left|\begin{array}{ll}tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5} & (1)\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 & (2)\end{array}\right.$. Решаваме я чрез заместване:

- от (1) получаваме $\sin\alpha=\frac{12}{5}\cos\alpha$.

- заместваме в (2) $\left(\frac{12}{5}\right)^2 \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{169}{25}\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{5}{13}$, но по условие α е в I квадрант, то знакът на cos α е положителен, затова $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.
- Заместваме в $\sin\alpha = \frac{12}{5}\cos\alpha$ и получаваме $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

Остава да намерим котангенс от формулата $\cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} \Leftrightarrow \cot g\,\alpha = \frac{5}{12}$

Зад. 25: Пресметнете $tg\frac{\pi}{8}$; $\cot g\frac{\pi}{8}$.

Решение: За да използваме формулите за половинки ъгли (виж ТФ. 5.13 до 5.16)

трябва да представим $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$ и тогава:

- $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;
- $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
- $tg\frac{\pi}{8} = \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$;
- $\cot g\frac{\pi}{8} = \frac{1}{tg\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$.

Зад. 25: Намерете $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, ако $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\alpha \in (180^0; 270^0)$.

Решение:. Използваме (ТФ.4.5), която за нашия случай е

$tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tg\,\alpha}{1+tg\frac{\pi}{4}.tg\,\alpha} = -\frac{tg\,\alpha}{1+tg\,\alpha}$. Остава да намерим tg α.

- От основното тригонометрично тъждество намираме $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$, но по условие α е във II квадрант, то знакът на sin α е отрицателен, откъдето $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$.
- $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{5}$.
- $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = -\frac{tg\,\alpha}{1+tg\,\alpha} = -\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}} = -\frac{3}{8}$

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА".

Учебен център „СОЛЕМА" подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстуденти и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solemabg.com раздел „За нас".